A.F. NIKIFOROV

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS SPÉCIALES

A. NIKIFOROV ET V. OUVAROV

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS SPÉCIALES

Sous la direction
de A. SAMARSKI,
membre correspondant de l'Académie
des Sciences de l'U.R.S.S.

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

PRÉFACE

La résolution d'un grand nombre de problèmes de la physique théorique et mathématique, liés par exemple à l'étude des processus de la chaleur et de l'interaction du rayonnement avec la substance, de la propagation des ondes électromagnétiques et sonores, au développement de la théorie des réacteurs nucléaires et de la structure interne des étoiles, rend nécessaire l'utilisation des diverses fonctions spéciales. Les polynômes orthogonaux classiques, les fonctions sphériques, cylindriques et hypergéométriques sont les fonctions spéciales les plus usitées. Le présent ouvrage se donne pour but de réunir les éléments de la théorie des fonctions spéciales énumérées.

Les manuels existants consacrés aux fonctions spéciales abondent le plus souvent en formules et relations dont la déduction est basée sur les méthodes les plus variées, ce qui complique sensiblement leur étude et utilisation. Aussi les auteurs se sont-ils attachés, dans le livre proposé, à rendre leur exposé surtout logique et clair. Le livre commence par la description des fonctions spéciales les plus simples : ce sont les polynômes orthogonaux classiques. La théorie des autres fonctions spéciales est construite sur la base de la généralisation de la théorie des polynômes orthogonaux classiques. Tout cela a permis d'atteindre l'unité intérieure de l'exposé et de le rendre concis et relativement simple.

Considérons plus en détail le contenu des chapitres. L'étude approfondie des fonctions spéciales est impossible sans la connaissance des points essentiels de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Le rappel de certains théorèmes de cette théorie fait l'objet du premier chapitre (qui constitue donc une sorte d'introduction) et facilite la lecture du livre. On utilise souvent ces théorèmes dans les chapitres suivants. En particulier, on applique très largement le principe du prolongement analytique, grâce auquel on réalise de nombreuses démonstrations en imposant initialement certaines restrictions, pour étendre ensuite les résultats obtenus à un domaine plus vaste des valeurs de l'argument et des paramètres. On trouve aussi dans le chapitre premier la description des propriétés de la fonction gamma d'Euler, nécessaires à l'étude des fonctions spéciales.

Le chapitre II est la partie essentielle du livre. On y trouve la théorie des polynômes orthogonaux classiques et l'extension de cette

théorie à des équations arbitraires du type hypergéométrique. On considère d'abord certaines propriétés générales des polynômes orthogonaux arbitraires, propriétés résultant directement de l'orthogonalité de ces polynômes. Ensuite, on étudie les propriétés spéciales des polynômes orthogonaux classiques, découlant des propriétés concrètes du poids par rapport auquel ils sont orthogonaux.

Dans la plupart des manuels traitant des fonctions spéciales la théorie des polynômes de Legendre, de Laguerre et d'Hermite est construite en faisant appel aux fonctions génératrices. L'inconvénient de ce procédé consiste dans le fait qu'il n'établit pas la liaison directe entre la théorie des polynômes orthogonaux classiques et celle des polynômes orthogonaux arbitraires, rendant impossible, de cette façon, l'étude simultanée de tous les polynômes en question. D'autre part, on peut introduire pour chacun des polynômes, de façon générale, plusieurs fonctions génératrices. Dans ce livre, nous avons recours à un autre procédé, basé sur les propriétés différentielles du poids pour les polynômes orthogonaux classiques. A l'aide de l'équation différentielle pour le poids, on montre d'abord que les dérivées des polynômes orthogonaux classiques sont elles aussi des polynômes orthogonaux classiques. Ceci montré, on en tire l'équation différentielle ayant pour solutions les polynômes indiqués et on établit la formule de Rodrigues qui permet d'exprimer immédiatement les polynômes orthogonaux classiques en fonction du poids.

Dans le § 10 on introduit l'équation du type hypergéométrique, qui constitue la généralisation de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques à des valeurs non entières de la puissance et à des valeurs complexes des coefficients de l'équation. Cette équation admet comme solutions les fonctions hypergéométriques, les fonctions hypergéométriques dégénérées et les fonctions d'Hermite. En généralisant les propriétés des polynômes orthogonaux classiques, on arrive à obtenir les solutions des équations du type hypergéométrique sous forme explicite.

Ensuite, moyennant un simple changement de variable, on établit la liaison entre les équations du type hypergéométrique et une classe nouvelle d'équations différentielles, que nous appelons équations généralisées du type hypergéométrique *). Ce sont justement les équations de cette dernière espèce que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique. Elles interviennent, par exemple, à la résolution des équations de Laplace et de Helmholtz en divers systèmes de coordonnées curvilignes par la méthode de séparation des variables, à la résolution de l'équation de Schrödinger dans le cas de l'ato-

*) Les appellations «équations du type hypergéométrique» et «équation généralisée du type hypergéométrique» ne sont pas universellement adoptées. Nous les avons introduites pour faciliter notre exposé, à défaut de terminologie adéquate dans la littérature.

me d'hydrogène et de l'oscillateur harmonique, à l'étude du mouvement d'une particule dans un champ de forces centrales.

La théorie développée permet de trouver sans difficulté l'ensemble des solutions de l'équation généralisée du type hypergéométrique et d'établir entre ces solutions diverses relations fonctionnelles. Cela constitue la base de la théorie des fonctions cylindriques et hypergéométriques qui fait l'objet des chapitres suivants.

Chaque chapitre se termine par un rappel de formules fondamentales. Pour plus amples détails, nous signalons au lecteur l'ouvrage en trois volumes de H. Bateman et A. Erdélyi [1] qui résume toutes les formules de la théorie des fonctions spéciales connues vers le milieu des années quarante.

On accorde une grande attention aux applications de mécanique quantique, car, dans ce domaine, il arrive souvent que le lecteur se trouve incapable de saisir le fond du problème à cause des difficultés d'ordre mathématique, liées justement, et dans une large mesure, à l'abondance des fonctions spéciales. Le livre proposé pourrait donc constituer un complément utile pour l'étude de la mécanique quantique et, de façon plus générale, pour l'étude de la physique théorique.

Cet ouvrage est essentiellement l'exposition du cours des conférences sur les méthodes de la physique mathématique professé pendant des années à la faculté de physique théorique et expérimentale de l'Institut des ingénieurs de physique de Moscou et à la faculté de physique de l'Université d'Etat de Moscou.

Les paragraphes marqués par un astérisque peuvent être omis en première lecture. Cependant, les notions qu'ils contiennent seront utiles à ceux qui désireront approfondir leurs connaissances.

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance à A. Samarski, membre correspondant de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., pour son attention bienveillante et pour l'aide qu'il a constamment apportée pendant la rédaction de ce livre.

Les remarques et les conseils de A. Svechnikov et de A. Toulaïkov nous ont été d'une grande utilité. Nous tenons à exprimer notre gratitude à V. Lidski et A. Kompaneets qui ont bien voulu prendre part à la discussion du livre, ainsi qu'à tous les collègues dont le concours nous a été précieux.

A. NIKIFOROV, V. OUVAROV

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans notre exposé de la théorie des fonctions spéciales nous utiliserons une série de théorèmes tirés de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Ces théorèmes sont formulés au début du chapitre. On trouve leurs démonstrations, par exemple, dans les livres de A. Svechnikov et A. Tikhonov « Théorie des fonctions d'une variable complexe » ou de M. Lavrentiev et B. Chabat « Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe ». Le chapitre I contient en outre quelques rappels de la théorie des équations différentielles ordinaires et la description des propriétés essentielles de la fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$ et de sa dérivée logarithmique $\psi(z)$.

§ 1. Quelques théorèmes de la théorie des fonctions d'une variable complexe et de la théorie des équations différentielles

Citons quelques théorèmes qui seront utilisés dans le développement de la théorie des fonctions spéciales.

Théorème 1 (théorème d'unicité). *Si les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont analytiques dans un domaine D et si leurs valeurs coïncident sur une suite de points a_n qui converge vers un point a intérieur à D, on a partout dans D $f_1(z) = f_2(z)$.*

En particulier, les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ coïncident dans le domaine D si elles sont analytiques dans ce domaine et que leurs valeurs coïncident sur un certain segment contenu dans D.

Dans les applications du théorème d'unicité, un rôle important est joué par la notion de prolongement analytique.

Supposons que la fonction $f(z)$ soit définie sur un ensemble E appartenant au domaine D. Si la fonction $F(z)$ est analytique dans D et coïncide avec $f(z)$ sur E, on dit que $F(z)$ est le *prolongement analytique de $f(z)$* dans le domaine D.

Le théorème d'unicité implique une proposition importante, connue sous le nom de principe du prolongement analytique:

Si l'ensemble E contient au moins un point limite intérieur au domaine D, la fonction $f(z)$ possède au plus un seul prolongement analytique dans le domaine D.

Théorème 2 (analyticité de l'intégrale dépendant d'un paramètre). *Soient C une courbe rectifiable dans le plan de la variable complexe ξ et D un domaine dans le plan complexe des z. Si la fonction $f(z, \xi)$ est définie et continue par rapport aux deux variables quand $\xi \in C$ et $z \in D$ et si elle est en outre analytique par rapport à z dans le domaine D pour tout $\xi \in C$, la fonction*

$$F(z) = \int_C f(z, \xi)\, d\xi$$

sera analytique dans le domaine D et

$$F'(z) = \int_C f'_z(z, \xi)\, d\xi.$$

Le théorème reste valable pour les intégrales impropres uniformément convergentes de $F(z)$. Dans la suite, nous utiliserons souvent le critère suivant de la convergence uniforme des intégrales, analogue au critère de Weierstrass de la convergence uniforme des séries *):

Si pour tous $\xi \in C$ et $z \in D$ la fonction continue $f(z, \xi)$ vérifie l'inégalité

$$|f(z, \xi)| \leqslant \varphi(\xi)$$

et l'intégrale $\int_C \varphi(\xi)\, |d\xi|$ est convergente, l'intégrale $\int_C f(z, \xi)\, d\xi$ converge uniformément par rapport à z dans le domaine D.

Corollaire. *Supposons que la fonction $u_\nu(z)$ soit analytique par rapport à ν pour z fixe et par rapport à z pour ν fixe dans le domaine $\nu \in D_1$, $z \in D_2$, continue par rapport aux deux variables (ν, z) et représente la solution de l'équation différentielle linéaire*

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(\nu, z)\, u_\nu^{(k)}(z) = 0$$

dans un sous-domaine $\nu \in \tilde{D}_1 \subset D_1$, $z \in \tilde{D}_2 \subset D_2$. Si les coefficients de l'équation sont analytiques par rapport à ν et à z pour $\nu \in D_1$, $z \in D_2$, la fonction $u_\nu(z)$ vérifiera l'équation considérée dans tout le domaine $\nu \in D_1$, $z \in D_2$.

Démonstration. Mettons la fonction $u_\nu(z)$, avec ses dérivées, sous la forme de l'intégrale de Cauchy

$$u_\nu^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{u_\nu(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}.$$

*) Les énoncés du théorème 2 et du critère de convergence uniforme des intégrales sont tirés du livre de M. Evgrafov « Fonctions analytiques », « Naouka », 1968.

Conformément au théorème 2, la fonction $u_\nu^{(k)}(z)$ sera analytique par rapport à ν et à z dans le même domaine que la fonction $u_\nu(z)$. Aussi l'équation considérée, qui est vérifiée dans un sous-domaine $\nu \in \widetilde{D}_1$, $z \in \widetilde{D}_2$, reste-t-elle valable, en vertu du théorème d'unicité, pour tout le domaine $\nu \in D_1$, $z \in D_2$.

Théorème 3 (théorème de Weierstrass). *Supposons que les fonctions $f_n(z)$ soient analytiques dans le domaine D et que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformément, dans tout sous-domaine fermé $\overline{D}_1$ du domaine D, vers la fonction $f(z)$. Alors:*

1) *la fonction $f(z)$ est analytique dans le domaine D;*

2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$;

3) *la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ converge uniformément dans tout sous-domaine fermé $\overline{D}_1$ du domaine D.*

Remarquons en particulier que la série fonctionnelle $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est uniformément convergente dans le domaine D s'il existe un m tel que pour tout $z \in D$, avec $n > m$, soit vérifiée l'inégalité

$$\left| \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} \right| \leqslant q < 1,$$

où q est indépendant de z et $|f_m(z)| \leqslant C$ lorsque $z \in D$ (C = const).

Théorème 4. *Soient les fonctions $u_1(z)$ et $u_2(z)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dz}\left[k(z)\frac{du}{dz}\right] - q(z)\,u = 0. \tag{1}$$

Alors

$$k(z)\,W[u_1, u_2] = C, \tag{2}$$

où C est une constante non nulle et

$$W[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix}$$

est le wronskien.

Il est facile de vérifier la relation (2) par dérivation. Si $k(z)u_1(z) \neq$ $\neq 0$, on récrit (2) comme suit:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{C}{k(z)\,u_1^2(z)}. \tag{3}$$

Ne connaissant qu'une des solutions $u = u_1(z)$ de l'équation différentielle (1), on arrive à trouver, à l'aide de la formule (3), la seconde

solution linéairement indépendante de cette équation:

$$u_2(z) = Cu_1(z) \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{k(\xi)\, u_1^2(\xi)}. \tag{4}$$

La relation (4) donne naissance à un corollaire remarquable.

C o r o l l a i r e. *Supposons qu'on ait, pour $z \to a$,*

$$k(z) = (z-a)^{\mu}\, r(z), \qquad r(a) \neq 0,$$
$$u_1(z) = (z-a)^{m}\, v_1(z), \quad v_1(a) \neq 0,$$

où $r(z)$ et $v_1(z)$ sont des fonctions continues dans un certain voisinage du point $z = a$. Il existe alors une deuxième solution linéairement indépendante $u = u_2(z)$ de l'équation différentielle (1), *à savoir*:

$$u_2(z) = \begin{cases} (z-a)^{1-m-\mu}\, v_2(z) & (2m+\mu \neq 1), \\ (z-a)^{m} \ln(z-a)\, v_2(z) & (2m+\mu = 1), \end{cases}$$

où $v_2(a) \neq 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que $2m + \mu > 1$. Puisque pour $z \to a$ l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{k(\xi)\, u_1^2(\xi)} = \int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{(\xi - a)^{2m+\mu}\, r(\xi)\, v_1^2(\xi)}$$

tend vers l'infini, on tire de (4), d'après la règle de l'Hospital,

$$\lim_{z\to a} \frac{u_2(z)}{(z-a)^{1-m-\mu}} = Cv_1(a) \lim_{z\to a} \frac{\displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{(\xi-a)^{2m+\mu}\, r(\xi)\, v_1^2(\xi)}}{(z-a)^{1-2m-\mu}} =$$

$$= Cv_1(a) \lim_{z\to a} \frac{\dfrac{1}{(z-a)^{2m+\mu}\, r(z)\, v_1^2(z)}}{(1-2m-\mu)\,(z-a)^{-2m-\mu}} = \frac{C}{(1-2m-\mu)\, r(a)\, v_1(a)} \neq \infty,$$

ce qu'il fallait démontrer. Dans les autres cas, la méthode de la démonstration est analogue. Notons seulement que pour $2m + \mu < 1$ on doit choisir dans (4) $z_0 = a$ (pour que l'intégrale converge).

Donc, lorsque m et μ prennent des valeurs réelles, la seconde solution $u = u_2(z)$ sera non bornée dans le voisinage du point $z = a$ au cas où $m \neq 0$, $m + \mu > 1$, ou bien quand $m = 0$, $\mu \geqslant 1$.

§ 2. Fonction gamma

1. Définition. La fonction gamma se range parmi les fonctions spéciales les plus élémentaires mais en même temps fort importantes. La connaissance de ses propriétés est essentielle pour l'étude des autres fonctions spéciales. De surcroît, un grand nombre d'intégrales fréquentes en Analyse peuvent être exprimées au moyen de la fonction gamma.

La *fonction gamma d'Euler* $\Gamma(z)$, pour $\operatorname{Re} z > 0$, se définit par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{1}$$

L'intégrale (1) converge uniformément par rapport à z dans le domaine $0 < \delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant A$, quels que soient A et δ, car

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leqslant \begin{cases} t^{\delta-1} & \text{pour } 0 < t \leqslant 1, \\ e^{-t} t^{A-1} & \text{pour } t > 1 \end{cases}$$

et puisque les intégrales $\int_0^1 t^{\delta-1} dt$ et $\int_1^\infty e^{-t} t^{A-1} dt$ sont convergentes. Aussi la fonction $\Gamma(z)$ définie par l'intégrale (1) pour $\operatorname{Re} z > 0$ sera-t-elle analytique (voir § 1, théorème 2).

Pour obtenir le prolongement analytique de la fonction gamma sur tout le plan complexe, il est commode de mettre l'intégrale (1) sous forme d'une somme de deux intégrales:

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

où

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad Q(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Quand $t \geqslant 1$ et $\operatorname{Re} z \leqslant A$, on a

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leqslant e^{-t} t^{A-1}.$$

Pour cette raison l'intégrale définissant la fonction $Q(z)$ converge uniformément en toute portion finie du plan complexe; donc, la fonction $Q(z)$ est une fonction entière.

Pour avoir le prolongement analytique de la fonction $P(z)$, supposons provisoirement que $z > 1$ et développons la fonction e^{-t} en série

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{t^n}{n!}.$$

Intégrant ce développement terme à terme par rapport au poids t^{z-1}, on obtient

$$P(z)=\int_0^1 t^{z-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}.$$

La possibilité de l'intégration terme à terme résulte de la convergence uniforme de la série sous le signe d'intégration.

Les termes de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$ sont des fonctions analytiques dans tout le plan complexe sauf en des points $z=0, -1, -2, \ldots$, de sorte que la série converge uniformément en toute portion finie du plan ne contenant pas ces points $\Big($aucun terme de la série dans le domaine $|z+n|\geqslant\delta>0$ pour $n=0, 1, 2, \ldots$ ne dépasse les termes de la série numérique convergente $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta}\frac{1}{n!}\Big)$. Par conséquent, la somme de la série est analytique dans tout le plan complexe sauf en $z=0, -1, -2, \ldots$ (voir § 1, théorème 3).

C'est la formule

$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}+\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt \tag{2}$$

qui fournit le prolongement analytique cherché de la fonction $\Gamma(z)$ sur tout le plan complexe, à l'exception des points $z=0, -1, -2, \ldots$ en lesquels la fonction gamma possède des pôles du premier ordre.

2. Intégrales définies liées à la fonction gamma. Fonction bêta. La classe des intégrales susceptibles d'être exprimées au moyen de la fonction gamma est bien vaste. On se bornera à deux exemples, indispensables pour l'exposé ultérieur.

Une des formules les plus usuelles est la formule suivante:

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}t^{z-1}\,dt=\frac{\Gamma(z)}{p^z}, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} z>0, \quad \operatorname{Re} p>0.$$

Si $p>0$, il suffit, pour démontrer cette formule, de faire le changement de variable $s=pt$ et de se servir ensuite de la représentation intégrale (1). Ce résultat peut être étendu à toutes valeurs complexes de p à partie réelle positive en appliquant le principe du prolongement analytique.

Voici un deuxième exemple. L'intégrale

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{4}$$

$$\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0,$$

est connue sous le nom de *fonction bêta d'Euler*. On voit aisément qu'avec les restrictions imposées l'intégrale (4) converge et représente, en vertu du théorème 2 du § 1, une fonction analytique par rapport à chacune des variables x et y.

La fonction bêta s'exprime à l'aide de la fonction gamma. Généralisons, à cet effet, un procédé bien connu employé au calcul de l'intégrale de Poisson $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. On a

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt = \int_0^\infty e^{-\xi^2}(\xi^2)^{x-1}\, 2\xi\, d\xi,$$

d'où

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\xi^2+\eta^2)}(\xi^2)^{x-1/2}(\eta^2)^{y-1/2}\,d\xi\,d\eta.$$

Calcuions cette intégrale double en coordonnées polaires en posant $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(y) = 4\int_0^\infty e^{-r^2}(r^2)^{x+y-1}\,r\,dr\int_0^{\pi/2}(\cos^2\varphi)^{x-1/2}(\sin^2\varphi)^{y-1/2}\,d\varphi =$$

$$= 2\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}(\cos^2\varphi)^{x-1/2}(\sin^2\varphi)^{y-1/2}\,d\varphi.$$

On ramène l'intégrale par rapport à φ à $\frac{1}{2}\mathrm{B}(x, y)$ par changement de variable $\cos^2\varphi = t$. Aussi

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{5}$$

A l'aide de la relation (5), on arrive à obtenir le prolongement analytique de la fonction $\mathrm{B}(x, y)$ pour toutes valeurs complexes de x et de y.

2—01174

3. Relations fonctionnelles. La fonction gamma $\Gamma(z)$ satisfait aux relations fonctionnelles suivantes:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{6}$$

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{7}$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z). \tag{8}$$

Ces relations jouent un rôle important lors des diverses transformations liées à la fonction gamma. La relation (7) est dite *formule de complément* de la fonction gamma, et la relation (8), *formule de duplication.*

Pour démontrer les formules (6) à (8), il est commode de les écrire, avec emploi de (5), sous forme de relations fonctionnelles pour la fonction bêta:

$$B(z, 1) = \frac{1}{z}, \tag{6'}$$

$$B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{7'}$$

$$2^{2z-1}B(z, z) = B\left(\frac{1}{2}, z\right). \tag{8'}$$

Les relations (6′) à (8′) peuvent être obtenues par calcul direct de l'intégrale (4) pour la fonction bêta $B(x, y)$, mais elles se trouvent alors assujetties à certaines contraintes imposées à z. Pour pouvoir étendre ces formules à des valeurs arbitraires de z, on a recours au principe du prolongement analytique.

Pour démontrer la relation (6′), proposons-nous de calculer $B(z, 1)$ pour $\operatorname{Re} z > 0$ suivant la formule (4):

$$B(z, 1) = \int_0^1 t^{z-1}\,dt = \frac{1}{z},$$

ce qui coïncide avec (6′).

Pour démontrer la relation (7′), supposons que $0 < z < 1$ et appliquons la formule (4) pour $x = z$, $y = 1 - z$:

$$B(z, 1-z) = \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^z dt.$$

Effectuons le changement de variable $s = \frac{t}{1-t}$. Il vient

$$B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{s^{z-1}}{1+s}\,ds.$$

Cette intégrale peut être calculée à l'aide de la théorie des résidus. A cet effet, passons de l'intégration le long de l'axe réel à l'intégra-

tion le long d'un contour fermé C représenté sur la figure 1. Dans le domaine limité par le contour C, la fonction

$$f(s)=\frac{s^{z-1}}{1+s}$$

n'a d'autres singularités qu'un pôle pour $s=-1$. Aussi, pour $R>1$

$$\int_C f(s)\,ds=2\pi i \operatorname*{Res}_{s=-1} f(s)=-2\pi i e^{i\pi z}.$$

D'autre part, les intégrales prises le long des circonférences de rayons r et R tendent vers zéro quand $r\to 0$ et $R\to\infty$, tandis que les

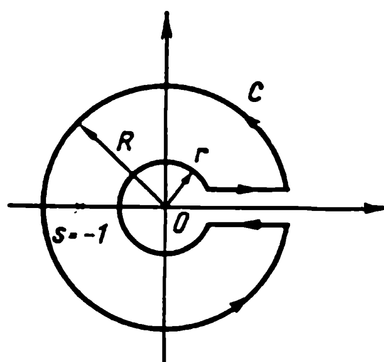


Fig. 1

intégrales prises le long du bord inférieur et le long du bord supérieur de la coupure ne diffèrent que par le facteur $-e^{2\pi iz}$. Il en résulte que pour $r\to 0$ et $R\to\infty$ on obtient

$$B(z,\,1-z)\,(1-e^{2\pi iz})=-2\pi i e^{i\pi z},$$

ce qui équivaut à (7′).

Quant à la relation (8′), posons dans (4) $x=y=z$ ($\operatorname{Re} z>0$):

$$B(z,z)=\int_0^1 [t(1-t)]^{z-1}\,dt=\int_0^1 \left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1} dt.$$

Comme la parabole $y={}^1/_4-(t-{}^1/_2)^2$ est symétrique par rapport à la droite $t={}^1/_2$, il vient

$$B(z,\,z)=2\int_{1/2}^1 \left[\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{z-1} dt,$$

d'où, après le changement de variable $t-{}^1/_2=\sqrt{u}/2$, on obtient

$$B(z,\,z)=\frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1 (1-u)^{z-1}\,u^{-1/2}\,du=\frac{B\left(\frac{1}{2},\,z\right)}{2^{2z-1}},$$

expression équivalente à la relation (8′).

Donc, les relations fonctionnelles (6) à (8) pour la fonction gamma sont démontrées.

Pour donner un exemple d'application de ces relations, calculons les valeurs de la fonction gamma $\Gamma(z)$ pour des valeurs entières et demi-entières de l'argument. La formule (6) implique

$$\Gamma(n+1)=n!,$$

car $\Gamma(1)=1$. On voit donc que la fonction gamma généralise la notion de factorielle, en définissant celle-ci pour toutes valeurs complexes. Ensuite, en posant dans (7) $z={}^1/_2$, on trouve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Aussi peut-on récrire la relation (8) comme suit:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

Posant ici $z=n+{}^1/_2$, on obtient

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}. \tag{9}$$

Notons enfin un corollaire important de la relation (7).

Corollaire. *La fonction gamma ne s'annule nulle part sur le plan de la variable complexe.*

Démonstration. Admettons que $\Gamma(z_0)=0$. Il est évident que $z_0\neq n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, car $\Gamma(n)=(n-1)!\neq 0$. Si $z_0\neq n$, les fonctions $\Gamma(z)$ et $\Gamma(1-z)$ seront analytiques pour $z=z_0$. Par ailleurs,

$$\lim_{z\to z_0}\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z_0}\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\Gamma(z)}=\infty,$$

ce qui contredit l'analyticité de la fonction $\Gamma(1-z)$ pour $z=z_0$.

§ 3. Dérivée logarithmique de la fonction gamma

La fonction gamma est étroitement liée à la fonction

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

fréquemment employée en Analyse. La fonction $\psi(z)$ est analytique en tous les points du plan complexe, sauf en des points $z=-n$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$, en lesquels elle admet des pôles simples.

1. Relations fonctionnelles. Pour obtenir les relations fonctionnelles auxquelles satisfait la fonction $\psi(z)$, prenons les dérivées logarithmiques dans les égalités (6) à (8) du § 2. On arrive alors aux relations

fonctionnelles suivantes:

$$\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z), \tag{1}$$

$$\psi(z)=\psi(1-z)-\pi\operatorname{cotg}\pi z, \tag{2}$$

$$2\ln 2+\psi(z)+\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)=2\psi(2z). \tag{3}$$

Notons aussi une relation qu'on obtient sans peine de (1):

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k-1}. \tag{4}$$

Les relations (1) à (4) permettent de calculer les valeurs de $\psi(z)$ pour certains z. Adoptons la notation

$$-\gamma=\psi(1)=\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt.$$

La quantité γ est dite la *constante d'Euler*, $\gamma=0{,}5772\ldots$ Posant dans (3) $z={}^1/_2$, on a

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2.$$

Pour $z=1$ et $z={}^1/_2$, la formule (4) donne respectivement

$$\psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{5}$$

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}. \tag{6}$$

2. Représentations intégrales et développement en série. Par définition

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Gamma(z)-\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\,\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{1}{\Delta z}-\frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\,\Delta z}\right].$$

Pour des $\Delta z>0$ suffisamment petits, l'expression $\frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\,\Delta z}$ presque coïncide avec la fonction bêta

$$B(z-\Delta z,\ \Delta z)=\frac{\Gamma(z-\Delta z)\,\Gamma(\Delta z)}{\Gamma(z)},$$

car

$$\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\Gamma(\Delta z)=\lim_{\Delta z\to 0}\Gamma(1+\Delta z)=1.$$

Aussi est-il possible d'obtenir la représentation intégrale de $\psi(z)$ à l'aide de la représentation intégrale (4) du § 2 pour la fonction bêta. Il est commode d'éliminer la quantité $1/\Delta z$, qui fait partie

de la relation limite pour $\psi(z)$, en considérant la différence $\psi(z) - \psi(1)$. On a

$$\psi(z)-\psi(1)=\psi(z)+\gamma=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{\Gamma(1-\Delta z)}{\Gamma(1)\,\Delta z}-\frac{\Gamma(z-\Delta z)}{\Gamma(z)\,\Delta z}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z\Gamma(\Delta z)}[\mathrm{B}(1-\Delta z,\ \Delta z)-\mathrm{B}(z-\Delta z,\ \Delta z)]=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\Delta z}dt.$$

Après le passage à la limite sous le signe d'intégration, légitime en vertu de la convergence uniforme de l'intégrale pour des Δz suffisamment petits, on obtient la représentation intégrale de $\psi(z)$:

$$\psi(z)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt,\quad \operatorname{Re} z>0. \tag{7}$$

Développant $1/(1-t)$ suivant les puissances de t et intégrant terme à terme, on obtient la représentation de $\psi(z)$ sous la forme d'une série

$$\psi(z)=-\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right)=-\gamma+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(z+n)}. \tag{8}$$

Pour justifier l'intégration terme à terme dans (7), utilisons le développement

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{N}t^n+\frac{t^{N+1}}{1-t}.$$

Donnons l'estimation de l'intégrale $\int_0^1\frac{t^{N+1}(1-t^{z-1})}{1-t}dt$. Puisque pour $\operatorname{Re} z>0$ et $0\leqslant t\leqslant 1$, l'inégalité $\left|\frac{t-t^z}{1-t}\right|<C$ est vérifiée (C étant une constante qui dépend de z), on a

$$\left|\int_0^1\frac{t^{N+1}(1-t^{z-1})}{1-t}dt\right|<\frac{C}{N+1},$$

d'où

$$\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt=\lim_{N\to\infty}(1-t^{z-1})\left(\sum_{n=0}^{N}t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right).$$

La série $\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right)$ converge uniformément dans le cercle $|z|<R<\infty$, car pour $n\geqslant N>R$

$$\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right|<\frac{R+1}{(n+1)(n-R)}$$

et la série $\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-R)}$ converge. Alors, en vertu du théorème 3 du § 1, le premier et le second membre de (8) sont des fonctions analytiques dans tout le plan complexe, sauf en des points $z=-n$ $(n=0, 1,\ldots)$, et, selon le principe du prolongement analytique, il est possible de supprimer la restriction unitiale $\operatorname{Re} z>0$ qui était imposée lors de la démonstration de la formule (8).

Remplaçant dans (7) t par e^{-t}, on trouve encore une représentation intégrale fréquemment employée de $\psi(z)$:

$$\psi(z)=-\gamma+\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt,\quad \operatorname{Re} z>0. \tag{9}$$

3. Représentations asymptotiques de la fonction gamma et de sa dérivée logarithmique. En établissant le caractère asymptotique des fonctions $\Gamma(z)$ et $\psi(z)$, on se servira des propriétés asymptotiques de l'intégrale de la forme

$$\varphi(z)=\int_0^{\infty}e^{-zt}f(t)\,dt,\quad \operatorname{Re} z>0$$

pour des $|z|$ élevés. On supposera que la fonction $f(t)$ croît avec toutes ses dérivées, quand $t\to\infty$, au plus aussi vite qu'une puissance finie de t. Intégrant par parties n fois l'expression de $\varphi(z)$, on obtient

$$\varphi(z)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)\,e^{-zt}}{z^{k+1}}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{r_n(z)}{z^{n+1}},$$

où

$$r_n(z)=\int_0^{\infty}e^{-zt}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Quand $t=\infty$, les substitutions s'annulent. Aussi

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{z^{k+1}}+\frac{r_n(z)}{z^{n+1}}.$$

Si l'intégrale

$$\int_0^\infty |f^{(n+1)}(t)|\,dt < \infty, \tag{10}$$

la représentation obtenue permet de prolonger analytiquement la fonction $\varphi(z)$ dans le domaine $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, car l'intégrale définissant la fonction $r_n(z)$ converge uniformément dans ce domaine. En effet, quand $\operatorname{Re} z \geqslant 0$,

$$|e^{-zt}f^{(n+1)}(t)| \leqslant |f^{(n+1)}(t)|$$

et l'intégrale $\int_0^\infty |f^{(n+1)}(t)|\,dt$ converge. En outre, il découle de l'estimation citée que la fonction $r_n(z)$ est bornée uniformément dans le domaine indiqué.

Donc, étant donné $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ et la condition auxiliaire (10), on a

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{z^{k+1}} + R_n(z), \tag{11}$$

$$R_n(z) = \frac{1}{z^{n+1}}[f^{(n)}(0) + r_n(z)] = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right). \tag{12}$$

Ici et dans ce qui suit, nous utiliserons toujours la notation $f_1(z) = O[f_2(z)]$ pour $z \to z_0$ si, dans un certain voisinage du point $z = z_0$, les fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$ vérifient l'inégalité

$$|f_1(z)| \leqslant C\,|f_2(z)|,$$

où C est une constante.

Les formules asymptotiques de $\Gamma(z)$ et de $\psi(z)$ ne s'obtiennent pas directement de (11) et de (12). Or, considérant la représentation intégrale (9) de $\psi(z)$, on voit que

$$\psi'(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt,$$

où

$$f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}}.$$

On peut donc se servir des formules (11) et (12) pour établir d'abord la formule asymptotique de $\psi'(z)$. Remarquons que la condition (10) est remplie si $n \geqslant 1$. Cela résulte de la représentation

$$f(t) = t + \frac{t}{e^t - 1} \tag{13}$$

et du fait que toute dérivée de la fonction $1/(e^t - 1)$ décroît exponentiellement quand $t \to \infty$. Ainsi, pour établir la représentation asymptotique de la fonction $\psi'(z)$, on peut se servir des formules (11) et (12) pour $n \geqslant 1$:

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{z^{k+1}} + R_n(z) \quad (\operatorname{Re} z \geqslant 0), \tag{14}$$

où

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad f(t) = \frac{t}{1-e^{-t}}, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Les constantes $f^{(k)}(0)$ dans (14) peuvent être exprimées en fonction des quantités dites *nombres de Bernoulli* B_k, qui figurent en qualité de coefficients dans le développement taylorien de la fonction $t/(e^t - 1)$:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < 2\pi.$$

Il découle de (13) que $f^{(k)}(0) = B_k$ pour $k \neq 1$, $f'(0) = 1 + B_1$. Puisque l'égalité (13) peut s'écrire sous la forme

$$f(t) = t + f(-t),$$

en vertu de la parité de la dérivée seconde de la fonction $f(t)$, on a $f^{(k)}(0) = B_k = 0$ quand $k = 2m+1$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

On arrive à obtenir la relation de récurrence pour les nombres de Bernoulli en faisant usage de la représentation

$$t = (e^t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{m+k} \frac{B_k}{m!\,k!}.$$

Posons ici $m + k = n$ et faisons la somme des coefficients de t^n:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{(n-k)!\,k!}.$$

En comparant les coefficients de différentes puissances de t dans le premier et le second membre de cette égalité, on obtient la relation de récurrence suivante:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0 \quad \text{pour } n > 1, \quad B_0 = 1, \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Remplaçant dans (14) n par $2n$ et utilisant l'expression de $f^{(k)}(0)$ au moyen des nombres de Bernoulli, on arrive à la représentation suivante:

$$\psi'(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{z^{2k+1}} + R_{2n}(z). \tag{15}$$

Intégrant deux fois la représentation asymptotique (15), on a pour $n > 1$

$$\psi(z) = A + \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + R_n^{(1)}(z),$$

$$\ln \Gamma(z) = B + (A-1)z + \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + R_n^{(2)}(z).$$

Ici A et B sont des constantes,

$$R_n^{(1)}(z) = -\int_z^{\infty} R_{2n}(\xi)\,d\xi, \quad R_n^{(2)}(z) = -\int_z^{\infty} R_n^{(1)}(\xi)\,d\xi.$$

On entend par $\ln z$ la valeur principale du logarithme tel que $|\arg z| < \pi$.

Dans les expressions de $R_n^{(1)}(z)$ et $R_n^{(2)}(z)$ l'intégration se fait le long d'un contour arbitraire allant à l'infini dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Si l'on choisit, en qualité de contour, une droite $\xi = zt$ $(1 \leqslant t < \infty)$, on s'assure sans peine que

$$R_n^{(1)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right), \quad R_n^{(2)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right).$$

Faisant intervenir ces estimations, on constate que

$$\ln \Gamma(z) = B + (A-1)z + \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Pour obtenir les constantes A et B, revenons aux relations fonctionnelles (6) et (8) du § 2 et à l'estimation de $\ln \Gamma(z)$. Il découle de la relation

$$\ln \Gamma(z+1) - \ln \Gamma(z) - \ln z = 0$$

que

$$A - 1 + \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln(z+1) - \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z = O\left(\frac{1}{z}\right),$$

d'où $A = 0$. De manière analogue, en prenant le logarithme de la relation (8) du § 2, on trouve $B = 1/2 \ln 2\pi$. Par la substitution des valeurs des constantes A et B, on trouve en définitive les *représentations asymptotiques* suivantes:

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2kz^{2k}} + O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right), \tag{16}$$

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right). \tag{17}$$

Il vient alors, en particulier, pour $z > 0$

$$\Gamma(z+1)=\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z\left[1+\frac{1}{12z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right].$$

Posant ici $z=n$, on aboutit à la *formule de Stirling*:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Il est remarquable que cette formule reste valable avec une assez bonne précision aussi pour des n petits. Par exemple, même pour $n = 1$ et $n = 2$, on a, au lieu de $1!$ et $2!$, respectivement 0,92 et 1,92.

En recherchant les représentations asymptotiques de $\psi(z)$ et de $\Gamma(z)$, on supposait que $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Or, cette restriction n'est pas essentielle et peut être négligée. En effet, lorsque $\operatorname{Re} z < 0$, il suffit d'appliquer les relations fonctionnelles (1) et (2), suivant lesquelles

$$\psi(z)=\psi(1-z)-\pi\operatorname{cotg}\pi z=\psi(-z)-\frac{1}{z}-\pi\operatorname{cotg}\pi z.$$

Comme $\operatorname{Re}(-z) > 0$, en utilisant la représentation asymptotique de $\psi(-z)$, on obtient

$$\psi(z)=[\ln(-z)-\ln z-\pi\operatorname{cotg}\pi z]+$$
$$+\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}+O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right). \quad (18)$$

Il en découle que la représentation asymptotique (18) de $\psi(z)$ dans le demi-plan gauche diffère de la représentation asymptotique (16) dans le demi-plan droit par le terme supplémentaire $[\ln(-z) - \ln z - \pi\operatorname{cotg}\pi z]$. Montrons que pour $\operatorname{Re} z < 0$ et $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ $(\delta > 0)$, c.-à-d. pour $\pi/2 < |\arg z| \leqslant \pi - \delta$, ce terme supplémentaire décroît exponentiellement en module lorsque $z \to \infty$ et qu'il peut donc être inclus dans $O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right)$. En effet, pour la branche principale du logarithme

$$\ln(-z) = \ln z \pm i\pi,$$

où l'on choisit le signe positif si $\operatorname{Im} z < 0$ et le signe négatif si $\operatorname{Im} z > 0$. Ensuite, pour $z \to \infty$ et $\pi/2 < |\arg z| \leqslant \pi - \delta$ on a

$$\operatorname{cotg}\pi z=i\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}=\pm i\left[1+O\left(e^{\pm 2\pi\operatorname{Im} z}\right)\right]=$$
$$=\pm i\left[1+O\left(e^{-2\pi\sin\delta|z|}\right)\right].$$

Par conséquent, lorsque $z\to\infty$ et $\pi/2<|\arg z|\leqslant\pi-\delta$,

$$\ln(-z)-\ln z-\pi\operatorname{cotg} z=O\left(e^{-2\pi\sin\delta|z|}\right).$$

Ainsi donc, la représentation asymptotique (16) a lieu pour $\psi(z)$ avec une seule restriction: $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$. Comme la représentation asymptotique de $\ln \Gamma(z)$ a été obtenue par intégration directe de la représentation asymptotique de $\psi(z)$, elle vaut évidemment aussi pour $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$.

R e m a r q u e 1. La formule asymptotique de $\psi(z)$ nous permet d'obtenir une représentation connue de la constante d'Euler γ. En vertu de (5), on a pour tout n

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \psi(n+1).$$

Faisant usage de la représentation asymptotique de $\psi(n+1)$ pour $n \to \infty$, on est amené à l'égalité

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right].$$

R e m a r q u e 2. Vu le comportement asymptotique de $\Gamma(z)$, il est aisé d'obtenir une relation fréquemment employée en pratique:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)\, z^a} = 1, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta.$$

Formules fondamentales

Fonction gamma $\Gamma(z)$

Définition:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \quad \mathrm{Re}\, z > 0.$$

Prolongement analytique:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

$$z \neq -n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Intégrales liées à la fonction gamma:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \mathrm{Re}\, x > 0, \quad \mathrm{Re}\, y > 0.$$

Relations fonctionnelles:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z);$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z};$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\, \Gamma(2z).$$

Valeurs particulières :

$$\Gamma(n+1)=n\,!;\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\,\frac{(2n)\,!}{n\,!}.$$

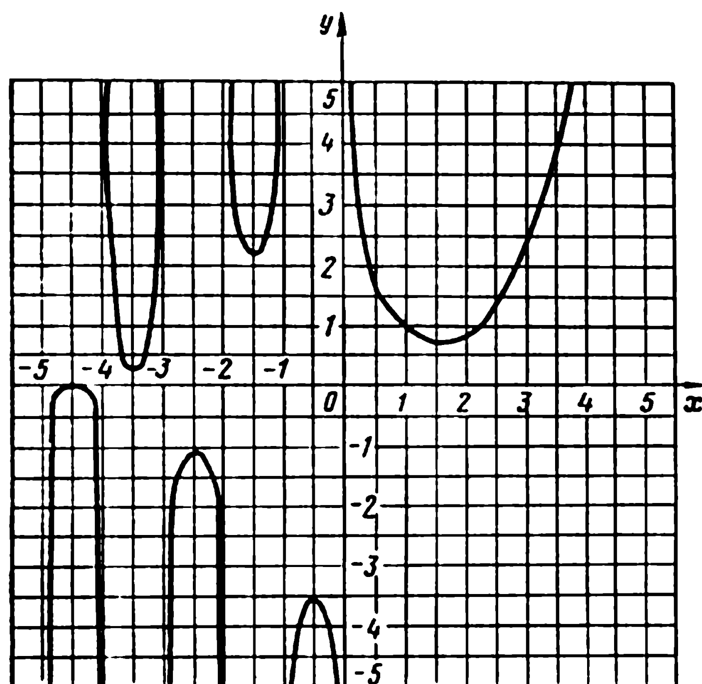


Fig. 2

Représentation asymptotique et ses corollaires :

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2k\,(2k-1)\,z^{2k-1}}+O\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right),$$

$|\arg z|\leqslant\pi-\delta$, B_k sont les nombres de Bernoulli ;

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\left[1+\frac{1}{12x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right],\quad x>0;$$

$$n\,!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\ \text{(formule de Stirling)};$$

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)}=z^{a}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right],\quad |\arg z|\leqslant\pi-\delta.$$

On voit sur la figure 2 la courbe représentative de la fonction $y=\Gamma(x)$.

I érivée logarithmique $\psi(z)$ de la fonction gamma

Définition :

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Relations fonctionnelles :

$$\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z);$$

$$\psi(z)=\psi(1-z)-\pi \operatorname{cotg} \pi z;$$

$$2\ln 2+\psi(z)+\psi(z+1/2)=2\psi(2z).$$

Valeurs particulières :

$$\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma, \quad \gamma=0{,}57721566\ldots;$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2;$$

$$\psi(n+1)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k};$$

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}.$$

Représentations intégrales et développement en série :

$$\psi(z)=-\gamma+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt=-\gamma+\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt, \quad \operatorname{Re} z>0;$$

$$\psi(z)=-\gamma+(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(z+n)}, \quad z\neq -n$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Représentation asymptotique :

$$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_{2k}}{2kz^{2k}}+O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right),$$

$|\arg z|\leqslant\pi-\delta$; B_k sont les nombres de Bernoulli.

CHAPITRE II

POLYNÔMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES

Le chapitre II est le chapitre principal du livre. On y étudie les fonctions spéciales élémentaires: les polynômes orthogonaux classiques. De plus, on trouve dans ce chapitre une base pour le développement de la théorie des fonctions spéciales du type hypergéométrique: en généralisant la représentation intégrale des polynômes orthogonaux classiques, on arrive à obtenir sous forme explicite les solutions des équations différentielles du type hypergéométrique. En particulier, cela a permis de construire, au § 11, la théorie des fonctions de deuxième espèce $Q_n(z)$ représentant les secondes solutions de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques. Aux fonctions de deuxième espèce d'ordre zéro $Q_0(z)$ sont étroitement liées d'autres fonctions spéciales fréquemment utilisées, telles que exponentielle intégrale $E_m(z)$, sinus intégral Si (z), cosinus intégral Ci (z), fonction des erreurs $\Phi(z)$, de même que les intégrales de Fresnel $S(z)$ et $C(z)$.

Au § 10, par simple changement de variable dans une équation du type hypergéométrique, on obtient une équation différentielle à laquelle aboutissent maints problèmes de physique mathématique et théorique: c'est l'équation généralisée du type hypergéométrique. Utilisant les propriétés des solutions de cette équation, on peut construire dans les chapitres III et IV une théorie générale des fonctions cylindriques et hypergéométriques. Aussi le lecteur désireux de connaître quelques-unes de ces fonctions pourra-t-il passer à leur étude aussitôt après la lecture du § 10.

Dans les §§ 13 à 16, on considère diverses applications de la théorie des polynômes orthogonaux classiques. Le § 17 est consacré à la théorie des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète.

§ 4. Définition des polynômes orthogonaux

1. Systèmes de fonctions orthogonaux. Soit donnée sur un intervalle (a, b) une fonction non négative $\rho(x)$; supposons en outre que pour une famille de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ les intégrales $\int_a^b \varphi_n^2(x)\rho(x)\,dx$ convergent. Introduisons le produit scalaire

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)\,dx.$$

On dit que deux fonctions sont *orthogonales* si leur produit scalaire est nul. Une famille de fonctions est dite un système orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle (a, b) si pour deux fonctions

quelconques de cette famille

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0, \qquad m \neq n. \tag{1}$$

Toute suite finie ou infinie de fonctions linéairement indépendantes $\{\psi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ peut être orthogonalisée en substituant à chacune des fonctions $\psi_n(x)$ la combinaison linéaire correspondante

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_{in}\psi_i(x) \quad (C_{nn} \neq 0) \tag{2}$$

et en choisissant les coefficients C_{in} de telle façon que les fonctions $\varphi_n(x)$ forment un système orthogonal. Montrons que les conditions d'orthogonalité définissent univoquement les fonctions $\varphi_n(x)$, qui peuvent être mises sous la forme (2) à un facteur de normalisation près.

Puisque $C_{nn} \neq 0$, on peut exprimer successivement les fonctions $\psi_n(x)$ à l'aide de $\varphi_n(x)$:

$$\psi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{in}\varphi_i(x) \quad \left(b_{nn} = \frac{1}{C_{nn}} \neq 0\right). \tag{3}$$

Il découle de (3) que toute combinaison linéaire de fonctions $\psi_n(x)$ peut être représentée sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_n(x)$. A l'aide des développements (2) et (3), on montre facilement que les conditions d'orthogonalité (1) sont équivalentes aux conditions

$$(\psi_m, \varphi_n) = 0, \qquad m < n. \tag{4}$$

Substituant dans ces conditions le développement (2), nous obtiendrons un système d'équations définissant les coefficients C_{in}:

$$\sum_{i=0}^{n} C_{in}(\psi_m, \psi_i) = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{5}$$

Si l'on considère le coefficient C_{nn} comme étant donné, les égalités (5) représentent un système d'équations linéaires par rapport aux coefficients C_{in} pour $i < n$. Le déterminant de ce système

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\psi_0, \psi_0) & (\psi_0, \psi_1) & \cdots & (\psi_0, \psi_{n-1}) \\ (\psi_1, \psi_0) & (\psi_1, \psi_1) & \cdots & (\psi_1, \psi_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\psi_{n-1}, \psi_0) & (\psi_{n-1}, \psi_1) & \cdots & (\psi_{n-1}, \psi_{n-1}) \end{vmatrix}$$

est non nul, car il représente le déterminant de Gram pour les fonctions linéairement indépendantes *) $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$.

*) On trouve la démonstration de ce fait, par exemple, dans le livre de I. Guelfand « Conférences sur l'algèbre linéaire », « Naouka », 1971.

Aussi le système d'équations (5) n'admet-il qu'une seule solution, tous les coefficients C_{in} étant proportionnels à C_{nn}.

Ainsi, nous venons de montrer que, pour un système donné de fonctions linéairement indépendantes $\{\psi_i(x)\}$, le poids $\rho(x)$ définit de façon univoque, à un facteur constant près, les fonctions $\varphi_n(x)$ qui peuvent être mises sous la forme (2) et vérifient les conditions d'orthogonalité (1).

Pour obtenir les fonctions $\varphi_n(x)$ sous forme explicite, examinons les égalités (2) et (5) comme un système d'équations linéaires par rapport aux coefficients C_{in} pour $i \leqslant n$, les fonctions $\psi_i(x)$ et $\varphi_n(x)$ étant considérées comme données. Tirons de ce système le coefficient C_{nn}:

$$C_{nn} = \frac{\begin{vmatrix} (\psi_0, \psi_0) & \ldots & (\psi_0, \psi_{n-1}) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\psi_{n-1}, \psi_0) & \ldots & (\psi_{n-1}, \psi_{n-1}) & 0 \\ \psi_0(x) & \ldots & \psi_{n-1}(x) & \psi_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\psi_0, \psi_0) & (\psi_0, \psi_1) & \ldots & (\psi_0, \psi_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\psi_{n-1}, \psi_0) & (\psi_{n-1}, \psi_1) & \ldots & (\psi_{n-1}, \psi_n) \\ \psi_0(x) & \psi_1(x) & \ldots & \psi_n(x) \end{vmatrix}}.$$

Développant le déterminant au numérateur suivant les éléments de la dernière colonne, on trouve qu'il est égal à $\varphi_n(x)\,\Delta_n$. Il en découle

$$\varphi_n(x) = A_n \begin{vmatrix} (\psi_0, \psi_0) & (\psi_0, \psi_1) & \ldots & (\psi_0, \psi_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\psi_{n-1}, \psi_0) & (\psi_{n-1}, \psi_1) & \ldots & (\psi_{n-1}, \psi_n) \\ \psi_0(x) & \psi_1(x) & \ldots & \psi_n(x) \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

où $A_n = C_{nn}/\Delta_n$ est une constante de normalisation.

2. Polynômes orthogonaux. Considérons le cas où $\psi_n(x) = x^n$. Ces fonctions, on le sait, sont linéairement indépendantes. Aux fonctions $\varphi_n(x)$ correspondront alors les polynômes $p_n(x)$ orthogonaux par rapport au poids $\rho(x)$. Pour ces polynômes, les conditions d'orthogonalité (1) et (4) prennent la forme

$$\int_a^b p_n(x)\, p_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \quad m \neq n; \qquad (7)$$

$$\int_a^b p_n(x)\, x^m \rho(x)\, dx = 0, \quad m < n. \qquad (8)$$

Enumérons des propriétés essentielles des polynômes orthogonaux $p_n(x)$ découlant des résultats obtenus auparavant.

3—01174

1) *Tout polynôme de degré n peut être représenté sous la forme d'une combinaison linéaire des polynômes orthogonaux* $p_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$. C'est pour cette raison, en particulier, que le polynôme $p_n(x)$ est, en vertu de (8), orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n.

2) *On peut définir les polynômes orthogonaux* $p_n(x)$ *de façon univoque, à un facteur constant près, par leur poids* $\rho(x)$.

On met les polynômes $p_n(x)$ sans difficulté sous forme explicite au moyen de (6). Dans le cas considéré le produit scalaire (ψ_m, ψ_n) s'exprime facilement par les moments de la fonction de poids

$$C_n = \int_a^b x^n \rho(x)\, dx,$$

dont l'existence pour n quelconque sera supposée par la suite. En effet,

$$(\psi_m, \psi_n) = \int_a^b x^{m+n} \rho(x)\, dx = C_{m+n}.$$

Aussi la formule (6) donne-t-elle

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \ldots & C_n \\ C_1 & C_2 & \ldots & C_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n-1} & C_n & \ldots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} \tag{9}$$

(A_n est une constante de normalisation).

§ 5. Quelques propriétés générales des polynômes orthogonaux

1. Relation de récurrence. Pour tout système de polynômes orthogonaux, on peut établir une formule de récurrence entre trois polynômes consécutifs $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$, $p_{n+1}(x)$.

Théorème 1. *Trois polynômes consécutifs arbitraires d'un système orthogonal* $\{p_n(x)\}$ *sont liés entre eux par la relation linéaire*

$$xp_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} p_{n-1}(x). \tag{1}$$

Ici

$$d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x) \rho(x)\, dx$$

est le carré de la norme, tandis que a_n *et* b_n *sont les coefficients des plus hauts degrés du polynôme* $p_n(x)$:

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots \qquad (a_n \neq 0).$$

Pour la démonstration, développons le polynôme $xp_n(x)$ de degré $(n+1)$ suivant les polynômes $p_m(x)$:

$$xp_n(x)=\sum_m C_{mn}p_m(x). \tag{2}$$

Les coefficients C_{mn} s'obtiennent par le procédé habituel:

$$C_{mn}=\frac{1}{d_m^2}\int_a^b p_m(x)\,xp_n(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{3}$$

Il résulte de (3) que

$$d_m^2C_{mn}=d_n^2C_{nm}. \tag{4}$$

Comme dans (2) $C_{mn}=0$ quand $m>n+1$, on a en vertu de (4) $C_{mn}=0$ pour $m<n-1$. Par conséquent,

$$xp_n(x)=C_{n+1,\,n}p_{n+1}(x)+C_{nn}p_n(x)+C_{n-1,\,n}p_{n-1}(x). \tag{5}$$

En comparant les coefficients de x^{n+1} et x^n dans le premier et le second membre de cette identité, on trouve

$$a_n=C_{n+1,\,n}a_{n+1},\quad b_n=C_{n+1,\,n}b_{n+1}+C_{nn}a_n,$$

d'où

$$C_{n+1,\,n}=\frac{a_n}{a_{n+1}},\quad C_{nn}=\frac{b_n}{a_n}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}.$$

Pour trouver le coefficient $C_{n-1,\,n}$, utilisons la relation (4):

$$C_{n-1,\,n}=C_{n,\,n-1}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}=\frac{a_{n-1}}{a_n}\left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)^2.$$

Substituant dans (5) les valeurs trouvées de C_{mn}, on revient à (1).

Ainsi, connaissant les coefficients a_n, b_n et le carré de la norme de polynômes orthogonaux quelconques $p_n(x)$, on peut déterminer successivement ces polynômes.

Pour un x fixe, la relation de récurrence (1) est une équation aux différences linéaire du second ordre par rapport à la variable discrète n. Elle a donc deux solutions linéairement indépendantes. On vérifie sans peine que l'équation (1) pour $x \notin [a, b]$ a pour seconde solution une *fonction* dite *de seconde espèce*

$$q_n(x)=\int_a^b \frac{p_n(s)\,\rho(s)}{s-x}\,ds,$$

dont l'importance est capitale en théorie générale des polynômes orthogonaux. Pour la démonstration, il suffit de multiplier l'équation (1) pour $p_n(s)$ par $\frac{\rho(s)}{s-x}$, de l'intégrer sur s dans les limites entre

$s = a$ et $s = b$ et d'appliquer l'identité

$$\frac{s}{s-x} = 1 + \frac{x}{s-x}.$$

2. Formule de Darboux-Christoffel. De la relation de récurrence (1) il découle immédiatement une formule importante de la théorie des polynômes orthogonaux, dite *formule de Darboux-Christoffel*:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2}\, \frac{a_n}{a_{n+1}}\, \frac{p_{n+1}(x)\, p_n(y) - p_n(x)\, p_{n+1}(y)}{x-y}. \tag{6}$$

Pour l'obtenir on fait usage des relations de récurrence

$$x p_k(x) = \frac{a_k}{a_{k+1}}\, p_{k+1}(x) + \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) p_k(x) + \frac{a_{k-1}}{a_k}\, \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}\, p_{k-1}(x),$$

$$y p_k(y) = \frac{a_k}{a_{k+1}}\, p_{k+1}(y) + \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right) p_k(y) + \frac{a_{k-1}}{a_k}\, \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}\, p_{k-1}(y).$$

Multiplions la première relation par $p_k(y)$, la seconde par $p_k(x)$, divisons chaque relation par d_k^2 et faisons la soustraction terme à terme. Il vient

$$(x-y)\frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_k^2}\, \frac{a_k}{a_{k+1}} [p_{k+1}(x)\, p_k(y) - p_k(x)\, p_{k+1}(y)] -$$

$$- \frac{1}{d_{k-1}^2}\, \frac{a_{k-1}}{a_k} [p_k(x)\, p_{k-1}(y) - p_{k-1}(x)\, p_k(y)].$$

Sommant suivant k entre $k=1$ et $k=n$, on obtient

$$(x-y) \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k(x)\, p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2}\, \frac{a_n}{a_{n+1}} [p_{n+1}(x)\, p_n(y) - p_n(x)\, p_{n+1}(y)] -$$

$$- \frac{a_0}{a_1}\, \frac{1}{d_0^2} [p_1(x)\, p_0(y) - p_0(x)\, p_1(y)].$$

Puisque

$$p_0(x) = p_0(y) = a_0, \qquad p_1(x) - p_1(y) = a_1(x-y),$$

la formule obtenue est, de toute évidence, équivalente à (6).

3. Propriétés des zéros.

1) *Tous les zéros du polynôme $p_n(x)$ appartiennent au segment* $[a, b]$.

Soit $x \notin [a, b]$. On a

$$\int_a^b \frac{p_n^2(s)}{s-x}\, \rho(s)\, ds = \int_a^b p_n(s)\, \frac{p_n(s) - p_n(x)}{s-x}\, \rho(s)\, ds + p_n(x) \int_a^b \frac{p_n(s)}{s-x}\, \rho(s)\, ds.$$

Conformément au théorème de Bézout, l'expression $\frac{p_n(s)-p_n(x)}{s-x}$ est un polynôme en s de degré $(n-1)$. Alors, en vertu de l'égalité (8) du § 4, la première intégrale du second membre est égale à zéro, d'où

$$\int_a^b \frac{p_n^2(s)}{s-x}\,\rho(s)\,ds = p_n(x)\,q_n(x). \tag{7}$$

Si x est un nombre réel, l'expression sous le signe d'intégration dans le premier membre de (7) garde le signe quelle que soit la valeur de $s \in [a, b]$. Donc, dans ce cas le polynôme $p_n(x) \neq 0$.

Si $x = \sigma + i\tau$ et $\tau \neq 0$, le premier membre de (7) peut s'écrire sous la forme

$$\int_a^b \frac{p_n^2(s)}{s-x}\,\rho(s)\,ds = \int_a^b \frac{(s-\sigma)\,p_n^2(s)}{(s-\sigma)^2+\tau^2}\,\rho(s)\,ds + i\tau \int_a^b \frac{p_n^2(s)\,\rho(s)}{(s-\sigma)^2+\tau^2}\,ds.$$

La partie imaginaire de cette expression est évidemment non nulle. Il s'ensuit que $p_n(x) \neq 0$ aussi quand x est un nombre complexe.

Ainsi nous venons de montrer que le polynôme $p_n(x)$ n'admet pas de zéros en dehors du segment $[a, b]$. Tous les n zéros du polynôme $p_n(x)$ appartiennent donc au segment $[a, b]$.

Il découle de la démonstration que la fonction de seconde espèce $q_n(x)$ n'a pas non plus de zéros pour $x \notin [a, b]$.

2) *Tous les zéros du polynôme $p_n(x)$ sont simples.*

Pour le démontrer, passons, dans la formule de Darboux-Christoffel, à la limite $y \to x$ pour x fixe. D'après la règle de l'Hospital

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k^2(x)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2}\,\frac{a_n}{a_{n+1}}\,[p'_{n+1}(x)\,p_n(x) - p'_n(x)\,p_{n+1}(x)]. \tag{8}$$

Il est évident que les polynômes $p_n(x)$ et $p'_n(x)$ ne peuvent s'annuler simultanément, vu que l'expression du premier membre est essentiellement positive en vertu de $p_0(x) = a_0 \neq 0$.

3) *Les zéros des polynômes $p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ alternent.*

Soient x_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ les zéros du polynôme $p_{n+1}(x)$. En vertu de (8), le signe du produit $p'_{n+1}(x)\,p_n(x)$ aux zéros du polynôme $p_{n+1}(x)$ ne dépend pas de i. Or, quand on passe de x_i à x_{i+1}, le premier facteur $p'_{n+1}(x)$ du second membre de (8) change de signe; cela veut dire que le deuxième facteur $p_n(x)$ doit aussi changer de signe. Par conséquent, $p_n(x)$ s'annule au moins une fois dans un certain point de l'intervalle (x_i, x_{i+1}). Comme il y a n intervalles (x_i, x_{i+1}) et chacun d'eux contient au moins un des n zéros du polynôme $p_n(x)$, il est évident qu'entre deux zéros successifs quelconques du polynôme $p_{n+1}(x)$ il y a exactement un zéro du polynôme $p_n(x)$.

Il en découle, en particulier, que *les polynômes orthogonaux ne peuvent s'annuler aux extrémités du segment* $[a, b]$.

4. Propriétés des polynômes résultant de la parité de la fonction de poids. Soient $\{p_n(x)\}$ des polynômes orthogonaux sur l'intervalle $(-a, a)$ par rapport au poids $\rho(x)$ qui est une fonction paire. Alors, en remplaçant x par $-x$ dans l'égalité (7) du § 4, on a

$$\int_{-a}^{a} p_n(-x)\, p_m(-x)\, \rho(x)\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Puisque le poids définit de manière unique, à un facteur constant près, le système de polynômes orthogonaux, on a $p_n(-x) = C_n p_n(x)$. Comparant les coefficients des plus hauts degrés, on trouve $C_n = (-1)^n$. Cela signifie que pour n impair les polynômes $p_n(x)$ ne contiennent que les puissances impaires de x, et pour n pair, ils ne contiennent que les puissances paires, de sorte que

$$p_{2n}(x) = s_n(x^2), \qquad p_{2n+1}(x) = x t_n(x^2).$$

Ici $s_n(x)$ et $t_n(x)$ sont des polynômes en x de degré n. Faisant intervenir les conditions d'orthogonalité pour les polynômes des degrés pairs, on a pour $m \neq n$

$$\int_{-a}^{a} p_{2n}(x)\, p_{2m}(x)\, \rho(x)\, dx = \int_{-a}^{a} s_n(x^2)\, s_m(x^2)\, \rho(x)\, dx =$$
$$= 2\int_{0}^{a} s_n(x^2)\, s_m(x^2)\, \rho(x)\, dx = \int_{0}^{a^2} s_n(x)\, s_m(x)\, \frac{\rho(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = 0.$$

Ainsi, *les polynômes* $s_n(x) = p_{2n}(\sqrt{x})$ *sont orthogonaux sur l'intervalle* $(0, a^2)$ *par rapport au poids* $\rho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\rho(\sqrt{x})$.

De façon parfaitement analogue

$$\int_{-a}^{a} p_{2n+1}(x)\, p_{2m+1}(x)\, \rho(x)\, dx = \int_{-a}^{a} x^2 t_n(x^2)\, t_m(x^2)\, \rho(x)\, dx =$$
$$= \int_{0}^{a^2} t_n(x)\, t_m(x)\, \sqrt{x}\, \rho(\sqrt{x})\, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Par conséquent, *les polynômes* $t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, p_{2n+1}(\sqrt{x})$ *sont orthogonaux par rapport au poids* $\rho_2(x) = \sqrt{x}\rho\ (\sqrt{x})$ *sur l'intervalle* $(0, a^2)$.

§ 6. Définition des polynômes orthogonaux classiques

1. Equation différentielle pour le poids. Ce sont les *polynômes orthogonaux classiques* qui constituent la classe la plus importante des polynômes orthogonaux. On les rencontre en résolvant certains problèmes aux limites de physique mathématique, ainsi que dans nombre de problèmes fondamentaux de la mécanique quantique (théorie du moment de quantité de mouvement, problème de l'oscillateur, problème de l'atome hydrogénoïde). Ils sont fréquemment utilisés dans les calculs approchés, par exemple pour l'établissement des formules de quadrature du type de Gauss et dans l'approximation des fonctions.

D é f i n i t i o n. *L'appellation de polynôme orthogonal classique s'applique aux polynômes $p_n(x)$ orthogonaux sur l'intervalle (a, b) par rapport au poids $\rho(x)$ vérifiant l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x). \tag{1}$$

Ici $\tau(x)$ est un polynôme de premier degré, et la fonction $\sigma(x)$, suivant le type de l'intervalle (a, b), a la forme

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & \textit{si } a \textit{ et } b \textit{ admettent des valeurs finies;} \\ (x-a) & \textit{si } a \textit{ est fini et } b=\infty; \\ (b-x) & \textit{si } a=-\infty \textit{ et } b \textit{ est fini;} \\ 1 & \textit{si } a=-\infty \textit{ et } b=\infty. \end{cases}$$

Comme l'équation différentielle (1) ne présente aucune singularité pour $a < x < b$, le poids $\rho(x)$ sera une fonction continûment dérivable dans cet intervalle, qui ne pourra admettre de singularités qu'aux extrémités de l'intervalle (a, b). Montrons que le poids $\rho(x)$ pour les polynômes orthogonaux classiques doit vérifier les conditions suivantes aux extrémités de l'intervalle (a, b): pour $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{x\to a} x^m\sigma(x)\rho(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to b} x^m\sigma(x)\rho(x) = 0.$$

Ecrivons ces conditions sous une forme plus serrée:

$$x^m\sigma(x)\rho(x)|_{x=a,\,b} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Pour commencer, assurons-nous qu'il y a les limites finies

$$\lim_{x\to a} x^m\sigma(x)\rho(x) = A_m, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to b} x^m\sigma(x)\rho(x) = B_m. \tag{4}$$

La démonstration sera basée sur une égalité évidente découlant de l'équation différentielle (1):

$$x^m\sigma(x)\rho(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}[x^m\sigma(x)\rho(x)]\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [mx^{m-1}\sigma(x) + x^m\tau(x)]\,\rho(x)\,dx, \quad a < x_1 < x_2 < b.$$

Passons à la limite dans cette expression pour $x_1 \to a$ et pour une valeur fixe de x_2. Puisque l'expression $mx^{m-1}\sigma(x) + x^m\tau(x)$ est un polynôme, l'intégrale

$$\int_a^{x_2} [mx^{m-1}\sigma(x) + x^m\tau(x)]\,\rho(x)\,dx$$

est finie en vertu de l'existence des moments de la fonction de poids $\rho(x)$ (cf. § 4, 2), ce qui entraîne l'égalité (3). L'égalité (4) se démontre de façon analogue.

Montrons maintenant que les constantes A_m et B_m sont nulles, quel que soit m. Raisonnons par l'absurde : soit par exemple $A_m \neq 0$ pour une certaine valeur de m. Si a est fini, on a $A_0 \neq 0$, car $A_m = a^m A_0$. Dans ce cas, pour $x \to a$, on a

$$\rho(x) \approx \frac{A_0}{\sigma(x)}.$$

Utilisant la forme explicite de $\sigma(x)$ on s'assure sans peine qu'un poids $\rho(x)$ se comportant ainsi pour $x \to a$ n'a pas de moments. Aussi $A_0 = 0$, et par conséquent, quel que soit m, on a toujours $A_m = 0$.

Si $a = -\infty$, pour $A_m \neq 0$ la quantité A_{m+1} ne peut prendre de valeur finie, car

$$A_{m+1} = \lim_{x\to-\infty} x\,[x^m\sigma(x)\rho(x)]$$

et

$$A_m = \lim_{x\to-\infty} x^m\sigma(x)\rho(x).$$

Nous venons de montrer que $A_m = 0$ pour tout m. On montre de même que $B_m = 0$. L'égalité (2) se trouve ainsi vérifiée.

Pour trouver la forme possible des fonctions $\rho(x)$, cherchons les solutions de l'équation (1) avec les conditions (2). On a

$$\frac{[\sigma(x)\rho(x)]'}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)},$$

d'où

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left[\int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}\,dx\right].$$

Suivant les valeurs prises par a et b, on aboutit aux expressions suivantes de $\rho(x)$, à un facteur constant non essentiel près:

$$\rho(x) = \begin{cases} (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}, \quad \alpha = -\dfrac{\tau(b)}{b-a} - 1, \quad \beta = \dfrac{\tau(a)}{b-a} - 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a \text{ et } b \text{ finis}); \\ (x-a)^{\alpha} e^{x\tau'(x)}, \quad \alpha = \tau(a) - 1 \qquad (a \text{ fini}, \ b = \infty); \\ (b-x)^{\alpha} e^{-x\tau'(x)}, \quad \alpha = -\tau(b) - 1 \, (a = -\infty, \ b \text{ fini}); \\ e^{\int \tau(x)dx} \qquad\qquad\qquad\qquad (a = -\infty, \ b = \infty). \end{cases} \tag{5}$$

Les conditions aux limites (2) pour $\rho(x)$ imposent à la fonction $\tau(x)$ les contraintes suivantes:

1) si a est fini, $\tau(a) > 0$;
2) si b est fini, $\tau(b) < 0$;
3) $\tau'(x) < 0$.

Remarquons que pour a et b finis, la dernière contrainte découle des deux premières.

2. Réduction à la forme canonique. Les formules (5) permettent de trouver le poids $\rho(x)$ pour un polynôme $\tau(x)$ donné pour tout intervalle (a, b). Il est évident qu'il est possible de ramener tout intervalle (a, b) à n'importe quel autre intervalle donné de même type par changement linéaire de la variable indépendante.

Dans le cas où a et b sont finis, il y a intérêt à choisir en qualité d'intervalle standard (a, b) l'intervalle $(-1, 1)$ en supposant que

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2} \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1).$$

Les polynômes $p_n(x)$ orthogonaux par rapport au poids $(b-x)^{\alpha} \times (x-a)^{\beta}$ sur l'intervalle (a, b) seront transformés alors en polynômes $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ orthogonaux par rapport au poids $\rho(t) = (1-t)^{\alpha} \times (1+t)^{\beta}$ sur l'intervalle $(-1, 1)$. Portant dans (1)

$$\rho(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}, \quad \sigma(t) = 1 - t^2,$$

on obtient $\tau(t) = -(\alpha + \beta + 2)\, t + \beta - \alpha$. Les conditions (2) seront remplies lorsque $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Les polynômes $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ normés d'une manière déterminée sont dits *polynômes de Jacobi*. Les questions liées à la normalisation feront l'objet du § 7.

Lorsque les intervalles sont semi-infinis, le changement linéaire de variable de la forme $x = \gamma t + \delta$ permet de choisir pour un intervalle standard l'intervalle $(0, \infty)$ et, en plus, de faire en sorte que le coefficient de t à la puissance 1 dans $\tau(t)$ soit égal à -1. Le poids

$\rho(t)$ devient alors

$$\rho(t) = t^{\alpha}e^{-t} \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Pour $\tau(t)$ de (1), en posant $\sigma(t) = t$, on a

$$\tau(t) = -t + \alpha + 1.$$

Les conditions (2) sont remplies quand $\alpha > -1$. Les polynômes orthogonaux correspondants s'appellent *polynômes de Laguerre* $L_n^{\alpha}(t)$.

Dans le cas où $a = -\infty$, $b = \infty$, il est commode de faire le changement linéaire de variable $x = \gamma t + \delta$ de telle façon que le poids $\rho(x) = e^{\int \tau(x)\,dx}$ passe, à un facteur près, à $\rho(t) = e^{-t^2}$. Pour $\tau(t)$ de (1) on a $\tau(t) = -2t$. Les polynômes correspondants sont les *polynômes d'Hermite* $H_n(t)$.

3. Polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite. On donne, à titre de référence, le tableau réunissant les principales caractéristiques de polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite (tableau 1).

Tableau 1

(a, b)	$\rho(x)$	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$p_n(x)$
$(-1, 1)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
$(0, \infty)$	$e^{-x}x^{\alpha}$	x	$-x+\alpha+1$	$L_n^{\alpha}(x)$
$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	1	$-2x$	$H_n(x)$

De la parité du poids $\rho(x) = e^{-x^2}$ il découle qu'on peut exprimer les polynômes d'Hermite en fonction des polynômes de Laguerre (cf. § 5, 4):

$$H_{2n}(x) \sim L_n^{-1/2}(x^2), \qquad H_{2n+1}(x) \sim xL_n^{1/2}(x^2)$$

(le symbole $\sim$ désigne la proportionnalité).

Les polynômes de Jacobi ont des cas particuliers importants:

1) *polynômes de Legendre* $P_n(x)$ $(\alpha = \beta = 0)$;

2) *polynômes de Tchébychev de première et de seconde espèce*

$$T_n(x) \quad \left(\alpha = \beta = -\frac{1}{2}\right) \text{ et } U_n(x) \quad \left(\alpha = \beta = \frac{1}{2}\right);$$

3) *polynômes de Gegenbauer* $C_n^{\lambda}(x)$ $\left(\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}\right)$, appelés quelquefois polynômes ultrasphériques.

Il est évident que les polynômes de Legendre et de Tchébychev sont des cas particuliers des polynômes de Gegenbauer. Les polynômes de Tchébychev admettent une expression sous forme explicite au moyen de formules trigonométriques.

4. Polynômes de Tchébychev de première espèce. Parmi les polynômes de Tchébychev, les plus connus sont les polynômes $T_n(x)$ orthogonaux par rapport au poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $(-1, 1)$. Ils vérifient évidemment la relation

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = 0, \quad n \neq m.$$

En posant $x = \cos \varphi$, on a

$$\int_{0}^{\pi} T_n(\cos \varphi) T_m(\cos \varphi) d\varphi = 0, \quad n \neq m.$$

D'autre part, on sait que

$$\int_{0}^{\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi = 0, \quad n \neq m.$$

Puisque $\cos n\varphi$ est un polynôme de degré n par rapport à $\cos \varphi$, il en vient que les polynômes $\cos n\varphi = \cos(n \arccos x)$ et $T_n(x)$ sont proportionnels l'un à l'autre. Par définition, on suppose que

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Les polynômes $T_n(x)$ s'obtiennent sans difficulté sous forme explicite par application de la formule d'Euler:

$$T_n(x) = \cos n\varphi = \frac{1}{2}(e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}) =$$
$$= \frac{1}{2}[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n].$$

Du comportement asymptotique des polynômes $T_n(x)$ pour $x \to \infty$ il découle que le coefficient du degré le plus élevé des polyr nômes $T_n(x)$ est égal à 2^{n-1}.

Les polynômes $\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ ont un emploi très large dans des problèmes variés exigeant l'approximation des fonctions. Ceci tient à ce que, comme l'a montré P. Tchébychev, ce sont là les polynômes s'écartant le moins de zéro sur le segment $[-1, 1]$; autrement dit, ils minimisent l'expression

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\pi_n(x)|.$$

Ici $\pi_n(x)$ est un polynôme arbitraire de degré n dans lequel le coefficient de la puissance la plus élevée est égal à l'unité *).

*) Pour la démonstration de cette propriété, consulter le livre de V. G o n t c h a r o v « Théorie d'interpolation et d'approximation des fonctions », Gostekhizdat, 1954.

§ 7. Propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux classiques

En plus des propriétés générales inhérentes à tout polynôme orthogonal, les polynômes orthogonaux classiques possèdent une série de qualités spéciales, dues aux propriétés concrètes de leur poids. Ces propriétés spéciales découlent de l'équation différentielle (1) et des conditions (2) du § 6.

1. Orthogonalité des dérivées. Montrons que les *dérivées des polynômes orthogonaux classiques* sont elles-mêmes, à leur tour, des *polynômes orthogonaux classiques.*

Pour la démonstration, considérons l'intégrale

$$\int_a^b p_n(x)\, x^{m-1}\tau(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{1}$$

Pour $m < n$ cette intégrale s'annule, car l'expression $x^{m-1}\tau(x)$ est un polynôme de degré m. D'autre part, en utilisant l'équation différentielle pour le poids et en intégrant par parties, on arrive à mettre l'intégrale (1) sous la forme

$$\int_a^b p_n(x)\, x^{m-1}\tau(x)\,\rho(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)\, x^{m-1}\frac{d}{dx}[\sigma(x)\,\rho(x)]\,dx =$$
$$= -\int_a^b \sigma(x)\,\rho(x)\,[x^{m-1}p_n(x)]'\,dx = -\int_a^b \sigma(x)\,\rho(x)\,x^{m-1}p_n'(x)\,dx -$$
$$-(m-1)\int_a^b p_n(x)\,\sigma(x)\,x^{m-2}\rho(x)\,dx.$$

Comme le degré du polynôme $\sigma(x)$ n'est pas supérieur à deux, la dernière intégrale s'annule quand $m < n$. Donc,

$$\int_a^b p_n'(x)\, x^{m-1}\sigma(x)\,\rho(x)\,dx = 0, \quad m < n.$$

Nous voyons donc que le polynôme $p_n'(x)$ de degré $(n-1)$ est pour tout n orthogonal par rapport au poids $\sigma(x)\,\rho(x)$ à tous les degrés inférieurs à $n-1$, c.-à-d. que les polynômes $\{p_n'(x)\}$ forment sur l'intervalle (a, b) un système de polynômes orthogonal par rapport au poids $\rho_1(x) = \sigma(x)\,\rho(x)$.

Il reste à démontrer que le poids $\rho_1(x)$ satisfait à l'équation différentielle de la forme (1) et aux conditions (2) du § 6. On a

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\,\rho_1(x)] = \sigma'(x)\,\rho_1(x) + \sigma(x)\,\tau(x)\,\rho(x) =$$
$$= [\sigma'(x) + \tau(x)]\,\rho_1(x) = \tau_1(x)\,\rho_1(x),$$

où $\tau_1(x)$ est un polynôme du premier degré.

L'existence des moments de la fonction de poids $\rho_1(x) = \sigma(x)\rho(x)$ découle immédiatement de l'existence de ceux de la fonction de poids $\rho(x)$.

Appliquant le principe de récurrence et procédant par des transformations analogues aux précédentes, nous obtenons un théorème plus général:

Théorème 1. *Les dérivées des polynômes orthogonaux classiques* $p_n^{(m)}(x)$ *sont aussi des polynômes classiques orthogonaux par rapport au poids*

$$\rho_m(x) = \sigma^m(x)\rho(x) \tag{2}$$

satisfaisant à l'équation différentielle de la forme (1) *du* § 6

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\rho_m(x)] = \tau_m(x)\rho_m(x) \tag{3}$$

avec les conditions aux limites

$$x^k\sigma(x)\rho_m(x)|_{x=a,\,b} = 0 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots). \tag{4}$$

Ici

$$\tau_m(x) = m\sigma'(x) + \tau(x). \tag{5}$$

N. Sonine a montré que, de tous les polynômes orthogonaux, les polynômes classiques sont les seuls à avoir leurs dérivées orthogonales.

2. Equation différentielle. Cherchons l'équation différentielle dont les solutions sont des polynômes orthogonaux classiques. Les dérivées des polynômes orthogonaux classiques étant les polynômes orthogonaux par rapport au poids $\sigma(x)\rho(x)$, on a

$$\int_a^b p_n'(x)(x^m)'\sigma(x)\rho(x)\,dx = 0$$

pour toute valeur de $m < n$. Intégrant par parties, on trouve

$$\int_a^b \sigma(x)\rho(x)p_n'(x)(x^m)'\,dx = \sigma(x)\rho(x)p_n'(x)x^m\Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b [\sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x)]\,x^m\rho(x)\,dx = 0,$$

c.-à-d. que

$$\int_a^b \widetilde{p}_n(x)x^m\rho(x)\,dx = 0, \quad m < n,$$

où

$$\widetilde{p}_n(x) = \sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x).$$

Etant donné que le polynôme $\widetilde{p}_n(x)$ de degré n est orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ à tout degré inférieur à n, il se peut qu'il ne

diffère du polynôme $p_n(x)$, en vertu de l'unicité du système de polynômes orthogonaux par rapport au poids $\rho(x)$ donné, que par un facteur constant, d'où

$$\sigma(x)\, p_n''(x) + \tau(x)\, p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0. \tag{6}$$

Nous venons donc d'obtenir, pour les polynômes $p_n(x)$, l'équation différentielle du second ordre.

Pour définir la constante λ_n, il suffit d'égaler dans (6) les coefficients de x^n:

$$\lambda_n = -n\left[\tau'(x) + \frac{1}{2}(n-1)\,\sigma''(x)\right]. \tag{7}$$

En comparant les coefficients de x^{n-1} on obtient la liaison entre les coefficients a_n et b_n des puissances x^n et x^{n-1} du polynôme $p_n(x)$:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}(0)}. \tag{8}$$

A l'aide de l'équation différentielle pour $\rho(x)$, mettons l'équation (6) sous *forme autoconjuguée*:

$$[\sigma(x)\,\rho(x)\,p_n'(x)]' + \lambda_n \rho(x)\, p_n(x) = 0. \tag{9}$$

Comme les dérivées $p_n^{(m)}(x)$ sont des polynômes classiques orthogonaux par rapport au poids $\rho_m(x)$, elles vérifient évidemment l'équation différentielle qu'on tire de l'équation pour $p_n(x)$ en remplaçant n par $n-m$, $\rho(x)$ par $\rho_m(x)$, $\tau(x)$ par $\tau_m(x)$:

$$\frac{d}{dx}[\rho_{m+1}(x)\, p_n^{(m+1)}(x)] = -\lambda_{nm}\rho_m(x)\, p_n^{(m)}(x), \tag{10}$$

$$\lambda_{nm} = -(n-m)\left[\tau_m'(x) + \frac{1}{2}(n-m-1)\,\sigma''(x)\right] =$$
$$= -(n-m)\left[(n+m-1)\frac{\sigma''}{2} + \tau'\right] \quad (\lambda_{n0} = \lambda_n). \tag{11}$$

A l'aide de l'équation (10), on arrive à établir pour les polynômes $p_n(x)$ une équation différentielle plus générale que (9). Comme

$$\rho_m(x)\, p_n^{(m)}(x) = \frac{1}{(-\lambda_{nm})}\frac{d}{dx}[\rho_{m+1}(x)\, p_n^{(m+1)}(x)],$$

on en tire successivement

$$\rho(x)\, p_n(x) = \rho_0(x)\, p_n^{(0)}(x) = \frac{1}{(-\lambda_{n0})}\frac{d}{dx}[\rho_1(x)\, p_n'(x)] =$$
$$= \frac{1}{(-\lambda_{n0})}\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{(-\lambda_{n1})}\frac{d}{dx}[\rho_2(x)\, p_n''(x)]\right\} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{(-1)^m}{\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}}\frac{d^m}{dx^m}[\rho_m(x)\, p_n^{(m)}(x)].$$

On se trouve donc en présence de l'équation différentielle d'ordre $2m$ pour les polynômes $p_n(x)$:

$$\frac{d^m}{dx^m}[\rho_m(x)\, p_n^{(m)}(x)] = A_{nm}\rho(x)\, p_n(x), \tag{12}$$

dans laquelle

$$A_{nm} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_{nk}. \tag{13}$$

3. Formule généralisée de Rodrigues. Il est possible d'exprimer les polynômes orthogonaux classiques directement en fonction du poids. Une formule de ce genre a été déduite pour les polynômes de Legendre en 1814 par Rodrigues. Si l'on veut obtenir des formules analogues pour des polynômes orthogonaux classiques quelconques, il suffit de poser dans (12) $m = n$. Puisque $p_n^{(n)}(x) = n!a_n$, on a

$$p_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\, \rho(x)]. \tag{14}$$

Ici

$$A_n = \frac{n!\, a_n}{A_{nn}} \tag{15}$$

est une constante dépendant de la normalisation. La formule (14) porte le nom de *formule généralisée de Rodrigues*. Il en découle, en particulier, que le polynôme $\tau(x)$ figurant dans l'équation différentielle pour $\rho(x)$ est proportionnel à $p_1(x)$. Pour le montrer, il suffit de poser dans (14) $n = 1$.

Citons aussi la formule de Rodrigues pour $p_n^{(m)}(x)$ qu'on déduit de (14) en remplaçant n par $n - m$, $\rho(x)$ par $\rho_m(x)$:

$$p_n^{(m)}(x) = B_{nm} \frac{1}{\rho_m(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[\sigma^{n-m}(x)\, \rho_m(x)] =$$
$$= B_{nm} \frac{1}{\sigma^m(x)\, \rho(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[\sigma^n(x)\, \rho(x)]. \tag{16}$$

Pour trouver la constante B_{nm}, il suffit de porter l'expression de $p_n^{(m)}(x)$ dans (12):

$$B_{nm} = A_{nm} A_n. \tag{17}$$

La formule de Rodrigues (14) peut être mise sous forme intégrale; à cet effet, on emploie l'intégrale de Cauchy pour la dérivée d'ordre n:

$$p_n(x) = \frac{A_n}{\rho(x)} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma^n(z)\, \rho(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz, \tag{18}$$

où C est un contour fermé entourant le point $z = x$. Plus loin on verra une généralisation de la représentation intégrale (18) grâce à laquelle on pourra développer la théorie générale des fonctions spéciales du type hypergéométrique.

4. Equations différentielles et formules de Rodrigues pour les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite. Pour les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite, l'équation différentielle (6) prend la forme

$$(1-x^2)\,y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)\,x]\,y'+ \\ +n\,(n+\alpha+\beta+1)\,y=0, \quad y=P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)\,; \tag{19}$$

$$xy''+(1+\alpha-x)\,y'+ny=0, \quad y=L_n^{\alpha}(x)\,; \tag{20}$$

$$y''-2xy'+2ny=0, \quad y=H_n(x). \tag{21}$$

Pour les polynômes de Legendre, l'équation est tirée de (19) avec la condition $\alpha=\beta=0$:

$$(1-x^2)\,y''-2xy'+n\,(n+1)\,y=0, \qquad y=P_n(x). \tag{22}$$

Citons maintenant la formule de Rodrigues pour les polynômes considérés. Par définition, la constante A_n dans la formule (14) est supposée égale aux valeurs suivantes *):

$$A_n=\begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} & \text{pour } P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x), \\ \dfrac{1}{n!} & \text{pour } L_n^{\alpha}(x), \\ (-1)^n & \text{pour } H_n(x). \end{cases} \tag{23}$$

On a donc

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{1}{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]\,; \tag{24}$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n!}\,e^x x^{-\alpha}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}x^{n+\alpha})\,; \tag{25}$$

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x^2}). \tag{26}$$

Posant dans (24) $\alpha=\beta=0$, on aboutit à la formule de Rodrigues pour les polynômes de Legendre:

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(1-x^2)^n. \tag{27}$$

Des égalités (27) et (26) on tire, conformément à la parité du poids, les *propriétés de parité* des polynômes de Legendre et d'Hermite:

$$P_n(-x)=(-1)^n\,P_n(x)\,; \tag{28}$$

$$H_n(-x)=(-1)^n\,H_n(x). \tag{29}$$

---

*) Un tel choix des constantes A_n est traditionnel et, dans un certain sens, arbitraire. Il correspond à la normalisation adoptée dans les livres [1, 8, 11]. Dans d'autres livres, par exemple dans [6, 7, 13], on emploie d'autres méthodes de normalisation.

La propriété (28) est un cas particulier de la propriété

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

résultant de (24).

Pour les cas particuliers des polynômes de Jacobi — les polynômes de Gegenbauer $C_n^{\lambda}(x)$ et de Tchébychev de première et de seconde espèce $T_n(x)$ et $U_n(x)$ — on emploie une normalisation qui diffère de celle pour les polynômes de Jacobi correspondants:

$$C_n^{\lambda}(x)=\frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\,\lambda-1/2)}(x);$$

$$T_n(x)=\frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(-1/2,\,-1/2)}(x);$$

$$U_n(x)=\frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} P_n^{(1/2,\,1/2)}(x).$$

On a utilisé la notation

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

La forme intégrale (18) de la formule de Rodrigues ainsi que le changement de la variable d'intégration z et le choix approprié du contour C permettent d'obtenir les différentes représentations pour les polynômes orthogonaux classiques sous la forme d'intégrales définies dans lesquelles la variable x figure en tant que paramètre. Par exemple, si l'on veut avoir la représentation intégrale des polynômes de Legendre, il y a intérêt à choisir en qualité de contour C une circonférence de centre au point $z=x$ et de rayon $\sqrt{1-x^2}$. Alors, en posant $z=x+\sqrt{1-x^2}\,e^{i\varphi}$, on obtient

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1-z^2)^n\,dz}{(z-x)^{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi. \quad (30)$$

De la représentation (30) découle une estimation fréquemment employée dans les applications, à savoir:

$$|P_n(x)|<1 \text{ pour } -1<x<1,$$

car

$$\left|x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right|=\left[x^2+(1-x^2)\sin^2\varphi\right]^{1/2}<1.$$

Citons quelques exemples élémentaires d'utilisation de la formule de Rodrigues.

Les dérivées des polynômes orthogonaux classiques $p'_n(x)$ étant des polynômes orthogonaux par rapport au poids $\sigma(x)\rho(x)$, on peut écrire les formules de dérivation:

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dx}=C_n^{(\alpha,\beta)}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x);$$

$$\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}=C_n^{(\alpha)}L_{n-1}^{\alpha+1}(x);$$

$$\frac{dH_n}{dx}=C_nH_{n-1}(x).$$

Ici $C_n^{(\alpha,\beta)}$, $C_n^{(\alpha)}$, C_n sont des constantes que l'on trouve sans peine par application des formules de Rodrigues pour les polynômes et leurs dérivées. Il vient alors

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dx}=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x);$$

$$\frac{dL_n^{\alpha}}{dx}=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x);$$

$$\frac{dH_n}{dx}=2nH_{n-1}(x).$$

Appliquant les formules de dérivation obtenues pour le calcul de $p_n^{(n)}(x)$, on trouve sans difficulté l'expression pour le coefficient a_n de la puissance la plus élevée. C'est ainsi qu'on a pour les polynômes d'Hermite

$$n!a_n=2n2(n-1)\ldots 2H_0(x),$$

d'où $a_n=2^n$. De même, pour les polynômes de Jacobi $a_n=\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, et pour les polynômes de Laguerre $a_n=(-1)^n/n!$.

La formule de Rodrigues permet d'obtenir une expression commode pour les carrés des normes d_n^2 des polynômes orthogonaux classiques. On a

$$d_n^2=\int_a^b p_n^2(x)\rho(x)\,dx=a_n\int_a^b x^np_n(x)\rho(x)\,dx=$$

$$=a_nA_n\int_a^b x^n\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)]\,dx.$$

Procédant n fois à l'intégration par parties, on obtient en définitive

$$d_n^2=a_nA_n(-1)^nn!\int_a^b\sigma^n(x)\rho(x)\,dx. \quad (31)$$

Pour les polynômes de Jacobi, on ramène l'intégrale figurant dans (31) à la fonction bêta par changement linéaire de variable, et pour les polynômes de Laguerre et d'Hermite, on la trouve par calcul direct, ce qui donne

$$d_n^2 = \begin{cases} \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & \text{pour } P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,; \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} & \text{pour } L_n^{\alpha}(x)\,; \\ 2^n n!\sqrt{\pi} & \text{pour } H_n(x). \end{cases}$$

Etant donné que (cf. § 6, 3)

$$H_{2n}(x) \sim L_n^{-1/2}(x^2),\quad H_{2n+1}(x) \sim xL_n^{1/2}(x^2),$$

on peut, en comparant dans ces relations les coefficients des degrés les plus élevés, obtenir la relation suivante entre les polynômes de Laguerre et ceux d'Hermite:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n!\, L_n^{-1/2}(x^2),$$
$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n!\, xL_n^{1/2}(x^2).$$

A l'aide des formules de Rodrigues (24) à (26), on trouve les valeurs des polynômes pour certaines valeurs de x. Appliquant dans (24) et (25) la règle de Leibniz au calcul des dérivées, on obtient en particulier

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = L_n^{\alpha}(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,n!}. \tag{32}$$

§ 8. Fonctions génératrices

1. Etablissement des formules pour les fonctions génératrices. Montrons qu'il est possible de considérer les polynômes orthogonaux classiques comme les coefficients du développement taylorien d'une certaine fonction analytique.

D é f i n i t i o n. *Nous appelons fonction génératrice du système de polynômes $\{p_n(x)\}$ une fonction $\Phi(x, t)$ dont le développement en série suivant les puissances de t pour des t suffisamment petits a la forme*

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{p}_n(x)}{n!} t^n, \tag{1}$$

où

$$\bar{p}_n(x) = \frac{1}{A_n} p_n(x).$$

Conformément à l'égalité (18) du § 7,

$$\bar{p}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma^n(z)\rho(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}, \tag{2}$$

où C est un contour fermé contenant à son intérieur le point $z = x$.

Introduisant dans (1) l'expression (2) de $\bar{p}_n(x)$ et intervertissant l'ordre de sommation et d'intégration, on obtient

$$\Phi(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\rho(x)}\int_C \frac{\rho(z)}{z-x}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sigma(z)\,t}{z-x}\right]^n\right\}dz.$$

Il est facile de prouver que le changement d'ordre de la sommation et de l'intégration, pour des t suffisamment petits et pour x fixe, est une transformation légitime. En sommant la progression géométrique sous le signe d'intégration, on a

$$\Phi(x, t)=\frac{1}{2\pi i\rho(x)}\int_C \frac{\rho(z)\,dz}{(z-x)-\sigma(z)\,t}.$$

Le dénominateur de l'expression sous le signe d'intégration admet deux racines. Si $t \to 0$, l'une des racines tend vers $z = x$, tandis que l'autre, si elle existe, tend vers l'infini. C'est pourquoi, pour des t suffisamment petits, on peut considérer que le contour C n'enferme qu'une seule racine $z = \xi(x, t)$ du dénominateur de l'expression sous le signe d'intégration et que la fonction à intégrer ne possède à l'intérieur de C qu'un seul pôle du premier ordre $z = \xi(x, t)$ de résidu

$$C_{-1}=\left.\frac{\rho(z)}{1-t\sigma'(z)}\right|_{z=\xi(x,\, t)}.$$

Il en résulte que la fonction $\Phi(x, t)$ a pour expression

$$\Phi(x, t)=\left.\frac{\rho(z)}{\rho(x)}\frac{1}{1-t\sigma'(z)}\right|_{z=\xi(x,\, t)}. \tag{3}$$

Ici $\xi(x, t)$ désigne la racine de l'équation du second degré

$$z - x - \sigma(z)\,t = 0 \tag{4}$$

qui pour les petits t est voisine de $z = x$.

2. Fonctions génératrices pour les polynômes de Legendre, de Laguerre et d'Hermite. Cherchons les fonctions génératrices pour les polynômes de Legendre, de Laguerre et d'Hermite.

1) Pour les *polynômes de Legendre*, l'équation (4) prend la forme

$$z - x - (1 - z^2)\,t = 0,$$

d'où

$$\xi(x, t)=\frac{-1+\sqrt{1+4t(t+x)}}{2t}$$

et, par conséquent, d'après la formule (3)

$$\Phi(x, t)=\left.\frac{1}{1+2zt}\right|_{z=\xi(x,\, t)}=\frac{1}{\sqrt{1+4tx+4t^2}}.$$

Conformément à (1) et à la formule (23) du § 7, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+4tx+4t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(-2t)^n.$$

Si l'on remplace t par $-t/2$, on aboutit à l'expression usuelle de la fonction génératrice:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n. \qquad (5)$$

Le développement (5) converge quand $|t|<1$. En effet, pour $x\in[-1, 1]$ les racines de l'équation

$$t^2-2xt+1=0$$

se situent sur le cercle unité

$$t_{1,2}=e^{\pm i\varphi} \quad (\cos\varphi=x).$$

L'expression (5) trouve un large emploi en physique théorique sous la forme

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}P_s(\cos\theta), \qquad (6)$$

où θ est l'angle formé par les rayons vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$, $r_<=$ $=\min(r_1, r_2)$, $r_>=\max(r_1, r_2)$.

En effet,

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta}=$$

$$=\begin{cases} r_1\sqrt{1+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2-2\frac{r_2}{r_1}\cos\theta} & (r_2<r_1),\\ r_2\sqrt{1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2-2\frac{r_1}{r_2}\cos\theta} & (r_1<r_2).\end{cases}$$

D'où

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|=r_>\sqrt{1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2-2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|}=\frac{1}{r_>\sqrt{1+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2-2\frac{r_<}{r_>}\cos\theta}}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}P_s(\cos\theta).$$

2) Pour les *polynômes de Laguerre* l'équation (4) prend la forme

$$z-x-zt=0,$$

d'où

$$\xi(x, t) = \frac{x}{1-t}$$

et, par conséquent,

$$\Phi(x, t) = \frac{\left(\frac{x}{1-t}\right)^{\alpha} e^{-\frac{x}{1-t}}}{x^{\alpha} e^{-x}} \cdot \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}}.$$

Conformément à (1) et à la formule (23) du § 7, on a

$$(1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n. \tag{7}$$

3) Pour les *polynômes d'Hermite* l'équation (4) prend la forme

$$z - x - t = 0,$$

d'où

$$\xi(x, t) = x + t$$

et, par conséquent,

$$\Phi(x, t) = e^{-(x+t)^2 + x^2} = e^{-2xt - t^2}.$$

Conformément à (1) et à la formule (23) du § 7, on a

$$e^{-2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{(-t)^n}{n!}.$$

Remplaçant t par $-t$, on obtient en définitive

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{8}$$

N o t e. Les fonctions génératrices s'avèrent fort utiles lorsqu'il s'agit de calculer des valeurs particulières des polynômes orthogonaux classiques. Par exemple, posant dans (5) $x = 1$ on obtient

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n,$$

d'où $P_n(1) = 1$. De même, en posant dans (8) $x = 0$, on trouve aisément les valeurs

$$H_{2n+1}(0) = 0, \quad H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}.$$

§ 9. Relations de récurrence

1. Divers types des relations de récurrence. Les polynômes orthogonaux classiques vérifient toute une série de relations de récurrence, dont l'une a déjà été obtenue dans le § 5 pour les polynômes orthogonaux par rapport à un poids quelconque; elle se présente comme suit:

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \tag{1}$$

où α_n, β_n, γ_n sont des constantes qu'on peut déterminer si les coefficients des plus hauts degrés de x et les carrés des normes des polynômes $p_n(x)$ sont connus.

D'un caractère moins général, les autres relations de récurrence découlent des propriétés d'orthogonalité des dérivées $p'_n(x)$. On obtient la première de ces relations en développant le polynôme $\sigma(x)p'_n(x)$ suivant les polynômes $p_m(x)$:

$$\sigma(x)p'_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} C_{mn}p_m(x). \tag{2}$$

Les coefficients C_{mn} s'obtiennent par la méthode ordinaire, en faisant usage des propriétés d'orthogonalité des polynômes $p_m(x)$:

$$C_{mn} = \frac{1}{d_m^2}\int_a^b \sigma(x)p'_n(x)p_m(x)\rho(x)\,dx.$$

Vu les propriétés d'orthogonalité des polynômes $p'_n(x)$, les coefficients $C_{mn} = 0$ quand $m < n-1$. Aussi la relation (2) prend-elle la forme

$$\sigma(x)p'_n(x) = C_{n+1,n}\,p_{n+1}(x) + C_{nn}p_n(x) + C_{n-1,n}\,p_{n-1}(x). \tag{3}$$

A l'aide de (1), la relation (3) peut être récrite sous forme plus simple:

$$\sigma(x)p'_n(x) = \alpha_n^{(1)}p_{n+1}(x) + (\beta_n^{(1)} + \gamma_n^{(1)}x)\,p_n(x) \tag{4}$$

($\alpha_n^{(1)}$, $\beta_n^{(1)}$, $\gamma_n^{(1)}$ sont des constantes).

On trouve encore une relation de récurrence entre les polynômes et leurs dérivées en dérivant la relation (4) et ayant recours à l'équation différentielle (6) du § 7 pour $p_n(x)$:

$$p_n(x) = \alpha_n^{(2)}p'_{n+1}(x) + (\beta_n^{(2)} + \gamma_n^{(2)}x)\,p'_n(x), \tag{5}$$

où

$$\alpha_n^{(2)} = -\frac{\alpha_n^{(1)}}{\gamma_n^{(1)}+\lambda_n}, \quad \beta_n^{(2)} + \gamma_n^{(2)}x = \frac{\sigma'(x) - \tau(x) - \beta_n^{(1)} - \gamma_n^{(1)}x}{\gamma_n^{(1)}+\lambda_n}.$$

2. Etablissement des relations de récurrence à l'aide des représentations intégrales. Appliquons-nous à déduire les relations de récurrence (1), (4) et (5) pour les polynômes orthogonaux classiques

directement au moyen de la représentation intégrale (18) du § 7. Cela nous permettra non seulement de déterminer des valeurs concrètes pour les coefficients figurant dans les relations de récurrence, mais aussi de construire par la suite la théorie des fonctions spéciales du type hypergéométrique. Ces fonctions sont la généralisation des polynômes orthogonaux classiques pour le cas où les polynômes $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ ont des coefficients complexes arbitraires et le degré n du polynôme est à remplacer par un nombre complexe arbitraire ν. On a

$$p_n(x) = \frac{A_n n!}{2\pi i} y_n(x), \tag{6}$$

où

$$y_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \int\limits_C \frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-x)^{n+1}} dz. \tag{7}$$

Pour déduire les relations de récurrence, écrivons au moyen de transformations identiques l'expression de $y_{n+1}(x)$ sous des formes différentes. Conformément à (7), on a

$$\rho(x) y_{n+1}(x) = \int\limits_C \frac{\sigma(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+2}} dz. \tag{8}$$

Portons dans (8) le développement du polynôme $\sigma(z)$ suivant les puissances de $z-x$:

$$\sigma(z) = \sigma(x) + \sigma'(x)(z-x) + \frac{1}{2}\sigma''(x)(z-x)^2.$$

Cela nous donne

$$\rho(x) y_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\sigma(x)[\rho(x) y_n(x)]' + \\ + \sigma'(x)\rho(x) y_n(x) + \frac{1}{2}\sigma''(x)\int\limits_C \frac{\rho_n(z)\,dz}{(z-x)^n}. \tag{9}$$

Une autre expression de $y_{n+1}(x)$ s'obtient en effectuant dans (8) l'intégration par parties et en employant la relation différentielle pour la fonction de poids $[\sigma(z)\rho_n(z)]' = \tau_n(z)\rho_n(z)$:

$$\rho(x) y_{n+1}(x) = -\frac{1}{n+1}\frac{\sigma(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+1}}\Bigg|_{z_1}^{z_2} + \frac{1}{n+1}\int\limits_C \frac{\tau_n(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+1}} dz. \tag{10}$$

Ici z_1 et z_2 sont les extrémités du contour C.

Puisque, pour les polynômes orthogonaux classiques, le contour C est fermé, de sorte que $z_1 = z_2$, il vient

$$\frac{\sigma(z)\rho_n(z)}{(z-x)^{n+1}}\Bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{\sigma^{n+1}(z)\rho(z)}{(z-x)^{n+1}}\Bigg|_{z_1}^{z_2} = 0. \tag{11}$$

Développant dans (10) le polynôme $\tau_n(z)$ suivant les puissances de $(z-x)$, on aboutit à la relation

$$\rho(x)\,y_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}\left[\tau_n(x)\,\rho(x)\,y_n(x)+\tau_n'(x)\int\limits_C \frac{\rho_n(z)}{(z-x)^n}\,dz\right]. \qquad (12)$$

Eliminant entre (9) et (12) la fonction $y_{n+1}(x)$ et ayant recours à l'équation différentielle du poids $\rho(x)$, on trouve la représentation intégrale pour la dérivée:

$$y_n'(x)=\frac{k_n}{\sigma(x)\,\rho(x)}\int\limits_C \frac{\sigma^n(z)\,\rho(z)}{(z-x)^n}\,dz, \qquad (13)$$

où

$$k_n=\tau'(x)+\frac{n-1}{2}\,\sigma''(x)=-\frac{\lambda_n}{n}. \qquad (14)$$

D'ailleurs, (13) n'est autre que la formule de Rodrigues pour la dérivée d'un polynôme orthogonal classique écrite au moyen de l'intégrale de Cauchy.

En comparant (13) et (12) on obtient une relation analogue à (4):

$$\sigma(x)\,y_n'(x)=\frac{k_n}{\tau_n'(x)}\,[(n+1)\,y_{n+1}(x)-\tau_n(x)\,y_n(x)]. \qquad (15)$$

La relation (4) est obtenue à partir de (15) à l'aide de (6) et a la forme

$$\sigma(x)\,p_n'(x)=\frac{k_n}{\tau_n'(x)}\left[\frac{A_n}{A_{n+1}}\,p_{n+1}(x)-\tau_n(x)\,p_n(x)\right]. \qquad (16)$$

On a donc dans la relation (4)

$$\alpha_n^{(1)}=\frac{k_n}{\tau_n'(x)}\,\frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad \beta_n^{(1)}+\gamma_n^{(1)}x=-\frac{k_n\tau_n(x)}{\tau_n'(x)}.$$

Alors dans la relation de récurrence (5) il faut poser

$$\alpha_n^{(2)}=\frac{1}{(n+1)\,\tau_n'(x)}\,\frac{A_n}{A_{n+1}},$$

$$\beta_n^{(2)}+\gamma_n^{(2)}x=\frac{1}{(n+1)\,\tau_n'(x)}\left\{\frac{\tau_n'(x)}{k_n}\,[\tau(x)-\sigma'(x)]-\tau_n(x)\right\}.$$

On a donc obtenu les relations (4) et (5).

La relation de récurrence (1) résulte de (5) si l'on exprime les dérivées $p_n'(x)$ et $p_{n+1}'(x)$ en fonction des polynômes eux-mêmes à l'aide de (4).

Les formules de récurrence pour les polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite sont données sous forme concrète à la fin du chapitre (page 131).

§ 10. Equations différentielles du type hypergéométrique

1. Fonctions du type hypergéométrique et leurs propriétés. En physique mathématique et théorique, on rencontre souvent des équations différentielles qui constituent la généralisation de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques et s'écrivent comme suit:

$$\sigma (x) y'' + \tau (x) y' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

où $\sigma (x)$ et $\tau (x)$ sont des polynômes arbitraires de degré non supérieur au deuxième et au premier respectivement (en général, à coefficients complexes) et λ est un nombre complexe arbitraire.

Nous convenons d'appeler une équation de la forme (1) *équation du type hypergéométrique*, et les solutions de celle-ci, *fonctions du type hypergéométrique*. Ces appellations tiennent à ce que les fonctions du type hypergéométrique admettent, comme cas particuliers, des fonctions hypergéométriques et des fonctions hypergéométriques dégénérées (voir chap. IV).

L'équation différentielle (1) peut aussi être écrite sous forme autoconjuguée:

$$[\sigma (x) \rho (x) y'] + \lambda\rho (x) y = 0 \tag{2}$$

si l'on prend en considération la fonction $\rho (x)$ vérifiant l'équation

$$[\sigma (x) \rho (x)]' = \tau (x) \rho (x) \tag{3}$$

qui est de la même forme que l'équation différentielle (1) tirée du § 6. Les expressions de $\rho (x)$ sont analogues aux expressions correspondantes pour les polynômes orthogonaux classiques:

$$\rho (x) = \begin{cases} (x-x_1)^{\alpha}(x_2-x)^{\beta} & \text{si } \sigma (x) \text{ est un polynôme de deuxième degré;} \\ (x-x_1)^{\alpha} e^{\beta x} & \text{si } \sigma (x) \text{ est un polynôme de premier degré;} \\ e^{\alpha x^2+\beta x} & \text{si } \sigma (x) \text{ est indépendant de } x. \end{cases}$$

Ici x_1 et x_2 sont les racines de l'équation $\sigma (x) = 0$, et α et β sont des constantes.

Comme la fonction $\rho (x)$ est, en général, une fonction non uniforme de la variable x, il sera supposé plus tard qu'on a fait dans le plan complexe certaines coupures qui permettent d'isoler une branche uniforme de la fonction $\rho (x)$.

Par analogie avec l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques, introduisons, au lieu de l'exposant n du

polynôme, une constante ν liée à λ par la relation

$$\lambda = -\nu\left[\tau'(x) + \frac{\nu-1}{2}\sigma''(x)\right]. \tag{4}$$

Dans le cas où $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) et les fonctions $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ se confondent avec les fonctions correspondantes pour les polynômes orthogonaux classiques, l'équation (1) admet comme solutions particulières les fonctions

$$y_\nu(x) = \frac{1}{\rho(x)} \int\limits_C \frac{\rho_\nu(z)}{(z-x)^{\nu+1}}\, dz, \tag{5}$$

où $\rho_\nu(z) = \sigma^\nu(z)\rho(z)$, et C est un contour fermé quelconque enfermant le point $z = x$.

En effet, les fonctions $y_\nu(x)$ se confondent alors, à un facteur constant près, avec les polynômes orthogonaux classiques $p_n(x)$ (voir la représentation intégrale (18) du § 7, de même que les formules (6) et (7) du § 9).

L'intégrale figurant dans le second membre de l'égalité (5) a bien un sens aussi pour $\nu \neq n$. Il est donc logique de chercher la solution particulière de (1), dans le cas général également, sous la forme (5). Montrons qu'il est possible de choisir le contour C (en général non fermé) de telle façon que la fonction $y_\nu(x)$ soit bien solution de l'équation (1). On suppose que le point $z = x$ n'appartient pas au contour C et que la fonction $\frac{\sigma^\nu(z)\rho(z)}{(z-x)^{\nu+1}}$ est une fonction analytique uniforme de la variable z sur le contour C, ce qui veut dire qu'on choisit une branche déterminée de la fonction multiforme $\frac{\sigma^\nu(z)\rho(z)}{(z-x)^{\nu+1}}$. Si en outre l'intégrale dans (5) converge uniformément en x dans un certain domaine D, on peut, dans ce domaine, faire la dérivation par rapport à x sous le signe d'intégration (voir le théorème 2 du § 1), c.-à-d. que

$$\frac{d}{dx}[\rho(x)\, y_\nu(x)] = (\nu+1) \int\limits_C \frac{\rho_\nu(z)\, dz}{(z-x)^{\nu+2}}. \tag{6}$$

Répétant avec la fonction $y_\nu(x)$ les mêmes transformations qu'on a faites pour $\nu = n$ dans le paragraphe précédent, on aboutit à une représentation intégrale pour $y'_\nu(x)$ analogue à la représentation (13) du § 9, de sorte que

$$y'_\nu(x) = \frac{k_\nu}{\sigma(x)\,\rho(x)} \int\limits_C \frac{\rho_\nu(z)}{(z-x)^\nu}\, dz, \tag{7}$$

où

$$k_\nu = \tau'(x) + \frac{\nu-1}{2}\sigma''(x)$$

si l'on remplit la condition analogue à (11) du § 9:

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(z)\,\rho(z)}{(z-x)^{\nu+1}}\right|_{z_1}^{z_2}=0 \tag{8}$$

(z_1 et z_2 sont les extrémités du contour C).

Multipliant les deux membres de l'égalité (7) par $\sigma(x)\,\rho(x)$ et procédant à la dérivation on retrouve l'équation différentielle (1), car $\lambda = -\nu k_\nu$. On vient de montrer donc que la solution particulière de l'équation du type hypergéométrique (1) peut être mise sous la forme (5).

Bien évidemment, les fonctions $y_\nu(x)$ vérifient des relations analogues à (1), (4) et (5) du § 9. On obtient ces relations par le même procédé qu'on a utilisé dans le § 9 pour les polynômes $p_n(x)$.

Nous avons employé, pour les solutions particulières (5) des équations du type hypergéométrique, une certaine normalisation des fonctions $y_\nu(x)$. Si l'expression de $y_\nu(x)$ contient un facteur supplémentaire qui depend de ν, une telle fonction reste toujours solution de l'équation différentielle (1) et vérifie les relations de récurrence de la forme (1), (4) et (5) du § 9. Notons qu'en vertu de la linéarité des relations de récurrence, deux fonctions du type hypergéométrique $y_\nu(x)$ qui ne diffèrent que par le facteur indépendant de ν et le choix du contour C, vérifient les mêmes relations de récurrence.

On voit de (3) que la fonction $\rho(x)$ n'admet des singularités que pour des x tels que $\sigma(x) = 0$. Il sera supposé que le contour C ne traverse aucun de ces points singuliers (ces points ne peuvent coïncider qu'avec les extrémités du contour).

Dans la suite, nous nous bornerons à des formes élémentaires de contours C, telles que lignes droites ou segments de celles-ci. Aussi suffira-t-il d'indiquer les valeurs possibles $z = z_1$ et $z = z_2$ des extrémités du contour C.

Soit $\sigma(x)$ un polynôme de deuxième degré ayant les racines $x = x_1$ et $x = x_2$. Substituant l'expression explicite de la fonction $\rho(z)$, récrivons la condition (8) sous la forme

$$\left.\frac{(z-x_1)^{\alpha+\nu+1}\,(x_2-z)^{\beta+\nu+1}}{(z-x)^{\nu+1}}\right|_{z_1}^{z_2}=0.$$

Cette condition sera satisfaite si l'on choisit n'importe quelle éventualité pour $z = z_1$ ou $z = z_2$:

1) $z = x_1$ si $\mathrm{Re}(\alpha+\nu+1) > 0$;
2) $z = x_2$ si $\mathrm{Re}(\beta+\nu+1) > 0$;
3) $z = \infty$ si $\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\nu+1) < 0$.

En partant des considérations analogues on peut choisir les extrémités du contour aussi dans le cas où $\sigma(x)$ est un polynôme de degré non supérieur à l'unité.

Si Re $(\nu + 1) < 0$, on peut prendre pour z_1 ou z_2 aussi le point $z = x$. Ceci fait, on verra apparaître dans (6), à la suite de la dérivation de l'intégrale, un terme supplémentaire $\left.\frac{\sigma^\nu(z)\rho(z)}{(z-x)^{\nu+1}}\right|_{z=x}$ s'annulant pour Re $(\nu + 1) < 0$, de sorte que la déduction tout entière reste valable. On peut montrer que la condition Re $(\nu + 1) <$ < 0 peut être remplacée par la condition moins restrictive Re $\nu < 0$.

Ainsi donc, à condition d'imposer certaines contraintes à ν et aux valeurs des paramètres définissant la fonction $\rho(x)$, il est bien possible d'utiliser des lignes droites ou leurs segments en qualité d'extrémités du contour $z = z_1$ et $z = z_2$. Pour les cas où ces conditions ne sont pas satisfaites, les propriétés des solutions des équations du type hypergéométrique seront établies par application du principe de prolongement analytique.

2. Equations différentielles se ramenant à des équations du type hypergéométrique. Considérons une classe d'équations différentielles qui résultent de l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(x)\, y'' + \tau(x)\, y' + \lambda y = 0$$

par un changement de variable de la forme $y = \varphi(x)\, u$, où

$$\varphi(x) = \sigma^\alpha(x)\, \rho^\beta(x) \tag{9}$$

(α et β sont des constantes arbitraires).

En déduisant l'équation différentielle de la fonction $u(x)$, il est commode d'employer la relation différentielle vérifiée par la fonction $\varphi(x)$:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\pi_1(x)}{\sigma(x)}, \tag{10}$$

$$\pi_1(x) = (\alpha - \beta)\, \sigma'(x) + \beta\tau(x). \tag{11}$$

L'égalité (10) découle de la relation différentielle (3) pour $\rho(x)$. La fonction $\pi_1(x)$ est, de toute évidence, un polynôme de degré non supérieur à l'unité.

Passons à la déduction de l'équation pour $u(x)$. On a

$$y' = \varphi u' + \varphi' u = \varphi\left(u' + \frac{\pi_1}{\sigma}u\right),$$

$$y'' = \varphi\left[\left(u' + \frac{\pi_1}{\sigma}u\right)' + \frac{\pi_1}{\sigma}\left(u' + \frac{\pi_1}{\sigma}u\right)\right] =$$
$$= \varphi\left(u'' + \frac{2\pi_1}{\sigma}u' + \frac{\pi_1^2 + \sigma\pi_1' - \pi_1\sigma'}{\sigma^2}u\right).$$

La fonction $u(x)$ a donc pour équation

$$\sigma(x)\, u'' + \tilde{\tau}(x)\, u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma(x)}u = 0, \tag{12}$$

où

$$\tilde{\tau}(x) = \tau(x) + 2\pi_1(x),$$
$$\tilde{\sigma}(x) = \pi_1^2(x) + [\tau(x) - \sigma'(x)]\,\pi_1(x) + \pi_1'(x)\,\sigma(x) + \lambda\sigma(x).$$

En déduisant l'équation (12) on n'avait pas besoin de la forme concrète du polynôme $\pi_1(x)$. L'équation (12) reste donc vraie aussi dans le cas où $\pi_1(x)$ n'est pas de la forme (11) mais représente un polynôme quelconque de degré non supérieur à l'unité. Dans ce cas la fonction $\varphi(x)$ est déterminée directement à partir de l'équation différentielle (10) et non à l'aide de l'égalité (9).

Les équations de la forme (12), où $\tilde{\tau}(x)$ est un polynôme quelconque de degré non supérieur à l'unité et $\sigma(x)$ et $\tilde{\sigma}(x)$ sont des polynômes quelconques de degré non supérieur à deux, se rencontrent dans une classe de problèmes très étendue. Elles interviennent, par exemple, à la résolution des équations de Laplace et de Helmholtz en divers systèmes de coordonnées curvilignes par la méthode de séparation des variables, à l'étude des problèmes fondamentaux de la mécanique quantique: mouvement d'une particule dans un champ symétrique sphérique, oscillateur harmonique, résolution des équations de Schrödinger, de Dirac et de Klein-Gordon pour le potentiel coulombien. D'autre part, nombre de problèmes modèles de la physique atomique, moléculaire et nucléaire amènent à l'équation (12). Nous conviendrons d'appeler les équations de la forme (12) *équations généralisées du type hypergéométrique*, car elles se transforment en équations du type hypergéométrique lorsque $\tilde{\sigma}(x)$ est proportionnel à $\sigma(x)$.

Nous venons de tirer l'équation de la forme (12) de (1) à l'aide de (10) et de la transformation $y = \varphi(x)\,u$. Montrons maintenant que toute équation généralisée du type hypergéométrique peut être ramenée, en général, à une équation du type hypergéométrique (1) en opérant la substitution $y = \varphi(x)\,u$ et en cherchant une fonction $\varphi(x)$ telle qu'elle vérifie l'équation de la forme (10). Faisant la substitution indiquée dans (12), nous retrouverons l'équation généralisée du type hypergéométrique

$$\sigma y'' + \tau y' + \frac{\sigma_1}{\sigma}\,y = 0. \tag{13}$$

Ici

$$\tau(x) = \tilde{\tau}(x) - 2\pi_1(x), \tag{14}$$
$$\sigma_1(x) = \tilde{\sigma}(x) + \pi_1^2(x) + [\sigma'(x) - \tilde{\tau}(x)]\,\pi_1(x) - \pi_1'(x)\,\sigma(x). \tag{15}$$

L'équation (13) sera bien une équation du type hypergéométrique si, les fonctions $\tilde{\tau}(x)$, $\tilde{\sigma}(x)$ et $\sigma(x)$ étant données, on réussit à trouver un polynôme $\pi_1(x)$ tel que la fonction $\sigma_1(x)$ soit de la forme $\sigma_1(x) = \lambda\sigma(x)$ (λ est une constante). Dans ce cas, faisant usage

de (15), nous obtenons pour le polynôme $\pi_1(x)$ l'expression

$$\pi_1(x)=\frac{\tilde{\tau}-\sigma'}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\tilde{\tau}-\sigma'}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}+k\sigma}, \tag{16}$$

$$k=\lambda+\pi_1'(x). \tag{17}$$

Puisque $\pi_1(x)$ est un polynôme de premier degré, l'expression sous le radical doit se présenter sous forme du carré d'un polynôme de degré non supérieur à l'unité. Cela n'est possible que dans le cas où le discriminant du polynôme de deuxième degré, figurant sous le radical, est nul. De cette condition il découle l'équation pour la constante k qui est, en général, du second degré. On voit sans peine que le coefficient de k^2 dans cette équation sera le discriminant du polynôme $\sigma(x)$. Ainsi donc, l'équation pour la constante k ne sera pas du second degré seulement dans le cas où la fonction $\sigma(x)$ est de la forme

$$\sigma(x) = (ax + b)^2.$$

Après avoir déterminé k, on cherche $\pi_1(x)$ suivant la formule (16), ensuite $\tau(x)$ et λ à l'aide de (14) et (17). Ceci fait, cherchons la fonction $\varphi(x)$ à partir de l'équation (10).

Il est évident que l'équation (12) peut être ramenée à une équation du type hypergéométrique par différents procédés, selon qu'on donne telle ou telle valeur à la constante k et qu'on choisisse tel ou autre signe dans la formule (16) pour $\pi_1(x)$.

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ ait été recherchée et l'équation (12) ramenée à l'équation (1). Connaissant la fonction $\tau(x)$, on pourra alors chercher le poids $\rho(x)$ à partir de l'équation (3) et d'après la constante λ déterminer à l'aide de (4) le paramètre ν de l'équation

$$\nu\left[\tau'(x)+\frac{\nu-1}{2}\sigma''(x)\right]+\lambda=0.$$

Une fois le contour C choisi, cela permet d'avoir la solution de l'équation généralisée du type hypergéométrique sous la forme

$$u(x)=\frac{1}{\varphi(x)}y_\nu(x),$$

$$y_\nu(x)=\frac{1}{\rho(x)}\int_C\frac{\sigma^\nu(z)\rho(z)}{(z-x)^{\nu+1}}dz. \tag{18}$$

Considérons les cas où l'équation (12) ne peut être réduite à l'équation (1) par le procédé décrit ci-dessus. Cet état de choses a lieu lorsque, dans l'équation du second degré pour la constante k, les coefficients de k^2 et k s'annulent simultanément et le terme constant est non nul. Ces conditions ne sont vérifiées que lorsque les polynômes $\sigma(x)$ et $\tilde{\sigma}-\left(\frac{\tilde{\tau}-\sigma'}{2}\right)^2$ ont la forme

$$\sigma(x)=(ax+b)^2,$$

$$\tilde{\sigma}-\left(\frac{\tilde{\tau}-\sigma'}{2}\right)^2=(ax+b)(a_0x+b_0),$$

avec $ab_0 - a_0b \neq 0$. Pour ramener l'équation (12) à sa forme élémentaire, dans ce cas, choisissons $\pi_1(x)$ tel que la fonction $\tau(x)$ soit nulle. Cherchons la fonction $\sigma_1(x)$:

$$\sigma_1(x) = \tilde{\sigma} + \left(\frac{\tilde{\tau}}{2}\right)^2 + (\sigma' - \tilde{\tau})\frac{\tilde{\tau}}{2} - \frac{\tilde{\tau}'}{2}\sigma =$$

$$= \tilde{\sigma} - \left(\frac{\tilde{\tau} - \sigma'}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{2}\right)^2 - \frac{\tilde{\tau}'}{2}\sigma = (ax+b)(a_1x - b_1),$$

où

$$a_1 = a_0 + a^3 - \frac{\tilde{\tau}'}{2}a, \quad b_1 = b_0 + a^2b - \frac{\tilde{\tau}'}{2}b,$$

$$a_1b - b_1a = a_0b - b_0a \neq 0.$$

L'équation (13) devient alors

$$y'' + \frac{a_1x + b_1}{(ax+b)^3}y = 0. \tag{19}$$

Après avoir effectué le changement linéaire de variable indépendante, on voit l'équation (19) se ramener à un cas particulier de l'équation de Lommel (voir § 18,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-2\alpha}{t}\frac{dy}{dt} + \left[(\beta\gamma t^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{t^2}\right]y = 0 \tag{20}$$

dont les solutions s'expriment par des fonctions cylindriques. A cet effet, il faut poser $t = a_1x + b_1$ pour $a = 0$ ou $t = ax + b$ pour $a \neq 0$.

La transformation de l'équation (12) en une équation du type hypergéométrique revêt un intérêt tout particulier au cas où l'équation (12) est elle-même déjà une équation du type hypergéométrique, c.-à-d. lorsque $\tilde{\sigma} = \mu\sigma$, où μ est une constante. Il est facile de voir que l'une des valeurs possibles que k peut prendre dans l'égalité (16) sera, en particulier, $k = \mu$. Cela étant, on a $\pi_1(x) = \tilde{\tau} - \sigma'$.

La transformation d'une équation du type hypergéométrique en une autre équation de ce même type rend possible la détermination d'après l'une des solutions de l'équation d'autres solutions et des relations fonctionnelles entre les différentes solutions.

Considérons quelques exemples typiques.

1) *Equation différentielle hypergéométrique*:

$$x(1-x)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]u' - \alpha\beta u = 0. \tag{21}$$

Dans ce cas (voir l'équation (12))

$$\tilde{\tau}(x) = \gamma - (\alpha + \beta + 1)x, \qquad \sigma(x) = x(1-x),$$
$$\tilde{\sigma}(x) = \mu\sigma(x), \qquad \mu = -\alpha\beta.$$

Conformément à (16) et (17), il y a les éventualités suivantes:

a) $k = -\alpha\beta$, $\pi_1(x) = \gamma - 1 - (\alpha + \beta - 1)x$,
$\tau(x) = 2 - \gamma + (\alpha + \beta - 3)x$, $\lambda = \alpha + \beta - 1 - \alpha\beta$,
$\varphi(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$.

Ecrivons les expressions pour $\tau(x)$ et la constante λ sous la forme adoptée pour l'équation hypergéométrique (21):

$$\tau(x) = \gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)\,x, \quad \lambda = -\alpha'\beta'.$$

Après des calculs peu compliqués, on obtient

$$\alpha' = 1 - \alpha, \quad \beta' = 1 - \beta, \quad \gamma' = 2 - \gamma.$$

b) $k = (\gamma - 1)(\alpha + \beta - \gamma) - \alpha\beta, \quad \pi_1(x) = \begin{cases} (\gamma - 1)(1 - x), \\ (\gamma - \alpha - \beta)\,x, \end{cases}$

$$\tau(x) = \gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)\,x, \quad \lambda = -\alpha'\beta',$$

$$\alpha' = \begin{cases} \alpha - \gamma + 1, \\ \gamma - \alpha, \end{cases} \quad \beta' = \begin{cases} \beta - \gamma + 1, \\ \gamma - \beta, \end{cases} \quad \gamma' = \begin{cases} 2 - \gamma, \\ \gamma, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^{\gamma - 1}, \\ (1 - x)^{\alpha + \beta - \gamma}. \end{cases}$$

Soit $u_1 = f(\alpha, \beta, \gamma, x)$ la solution particulière de l'équation (21). La fonction $y(x) = \varphi(x)\,u$ vérifie l'équation hypergéométrique aux paramètres α', β', γ'. Ainsi donc l'équation hypergéométrique a également pour solutions particulières les fonctions

$$u(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\,y(x) = \frac{1}{\varphi(x)}\,f(\alpha', \beta', \gamma', x),$$

c.-à-d. les fonctions

$$u_2 = x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} f(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x),$$
$$u_3 = x^{1-\gamma} f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$
$$u_4 = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} f(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x).$$

2) *Equation différentielle pour une fonction hypergéométrique dégénérée*:

$$xu'' + (\gamma - x)\,u' - \alpha u = 0. \tag{22}$$

Dans ce cas

$$\tilde{\tau}(x) = \gamma - x, \quad \sigma(x) = x, \quad \tilde{\sigma}(x) = \mu x, \quad \mu = -\alpha.$$

Les fonctions $\varphi(x)$ et les équations différentielles pour $y(x)$ peuvent se présenter sous les formes possibles suivantes:

$$xy'' + (2 - \gamma + x)\,y' + (1 - \alpha)\,y = 0, \quad \varphi(x) = e^{-x}x^{\gamma - 1}; \tag{23}$$
$$xy'' + (2 - \gamma - x)\,y' + (\gamma - \alpha - 1)\,y = 0, \quad \varphi(x) = x^{\gamma - 1}; \tag{24}$$
$$xy'' + (\gamma + x)\,y' + (\gamma - \alpha)\,y = 0, \quad \varphi(x) = e^{-x}. \tag{25}$$

L'équation (24) est une équation du type (22) aux paramètres $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$, tandis que les équations (23) et (25)

se réduisent à une équation du type (22) par changement de variable indépendante $z = -x$. Supposons que la fonction $u_1 = f(\alpha, \gamma, x)$ soit une solution particulière de l'équation (22). Les autres solutions particulières de cette équation seront alors les fonctions $u(x) = \frac{1}{\varphi(x)} y(x)$, c.-à-d. les fonctions

$$u_2 = e^x x^{1-\gamma} f(1-\alpha,\ 2-\gamma,\ -x),$$
$$u_3 = x^{1-\gamma} f(\alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x),$$
$$u_4 = e^x f(\gamma-\alpha,\ \gamma,\ -x).$$

3) *Equation différentielle pour la fonction d'Hermite*:

$$u'' - 2xu' + 2\nu u = 0. \tag{26}$$

Dans ce cas

$$\tilde{\tau}(x) = -2x, \quad \sigma(x) = 1, \quad \tilde{\sigma}(x) = 2\nu.$$

En plus du cas trivial $\varphi(x) = 1$, il ne peut y avoir que $\varphi(x) = e^{-x^2}$. La fonction $y(x)$ pour $\varphi(x) = e^{-x^2}$ satisfait à l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (2\nu + 2)\, y = 0.$$

Cette équation se réduit à l'équation du type (26) par le changement de variable $x = iz$. Supposons que la fonction $u_1 = f(\nu, x)$ soit une solution particulière de l'équation (26). Cette équation admettra alors comme autre solution particulière la fonction

$$u_2 = \frac{1}{\varphi(x)} y(x) = e^{x^2} f(-\nu-1,\ ix).$$

Comme l'équation (26) ne varie pas quand on remplace x par $-x$, elle admet aussi comme solutions les fonctions $u_3 = f(\nu, -x)$ et $u_4 = e^{x^2} f(-\nu-1, -ix)$.

3. Réduction à la forme canonique. Procédons à la classification des différentes formes de l'équation (1) en fonction du degré du polynôme $\sigma(x)$.

1) Soit $\sigma(x)$ un polynôme du second degré. Deux cas se présentent alors: a) les racines du polynôme $\sigma(x)$ sont différentes; b) les racines du polynôme $\sigma(x)$ se confondent.

a) Si les racines du polynôme $\sigma(x)$ sont distinctes, on peut admettre que $\sigma(x) = (x-a)(b-x)$, $a \neq b$. Effectuons le changement de variable indépendante

$$x = a + (b-a)\, z$$

et mettons l'équation (1) sous la forme

$$z(1-z)\, y'' + \frac{1}{(b-a)} \tau[a + (b-a) z]\, y' + \lambda y = 0.$$

On peut toujours, évidemment, choisir les paramètres α, β, γ de telle façon que l'équation obtenue se ramène à une équation hypergéométrique:

$$z(1-z)\,y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,z]\,y' - \alpha\beta y = 0.$$

Cette dernière admet comme solution particulière la fonction hypergéométrique $y = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, laquelle ne sera introduite que plus tard (voir chap. IV).

b) Si l'équation $\sigma(x) = 0$ admet des racines multiples, on a $\sigma(x) = (x-a)^2$. Opérant dans (1) le changement $t = \frac{1}{x-a}$, on obtient

$$y'' + \frac{2 - t\tau\left(a + \frac{1}{t}\right)}{t}\,y' + \frac{\lambda}{t^2}\,y = 0.$$

C'est l'équation généralisée du type hypergéométrique pour $\sigma(t) = t$, et, comme on a montré au point 2, elle peut être réduite à la forme

$$tu'' + \tilde{\tau}(t)\,u' + \mu u = 0, \tag{27}$$

où $\tilde{\tau}(t)$ est un polynôme de degré non supérieur à l'unité et μ une constante. La réduction à la forme canonique des équations du type (27) sera étudiée plus tard.

2) Soit $\sigma(x)$ un polynôme du premier degré, $\sigma(x) = x - a$. Posant $x = a + bz$, mettons l'équation (1) sous la forme

$$zy'' + \tau(a + bz)\,y' + \lambda by = 0. \tag{28}$$

Si $\tau'(x) = 0$, alors, quel que soit b, l'équation (28) représente l'équation de Lommel (20) dont les solutions s'expriment par des fonctions cylindriques. Par contre, si $\tau'(x) \neq 0$, alors, quand $b = -\frac{1}{\tau'(x)}$, on a

$$\tau(a + bz) = \tau(a) + \tau'(x)\,bz = \tau(a) - z.$$

L'équation (28) se transforme alors en équation pour la fonction hypergéométrique dégénérée

$$zy'' + (\gamma - z)\,y' - \alpha y = 0.$$

Cette équation admet comme solution particulière la fonction hypergéométrique dégénérée $y = F(\alpha, \gamma, z)$ (voir chap. IV).

3) Si $\sigma(x)$ est constant, on peut admettre $\sigma(x) = 1$.

Posant $x = a + bt$, écrivons l'équation (1) sous la forme

$$y'' + b\tau(a + bt)\,y' + \lambda b^2 y = 0.$$

En choisissant les constantes a, b et ν, on réussit à ramener l'équation obtenue à l'équation pour la fonction d'Hermite (voir chap. IV):

$$y'' - 2ty' + 2\nu y = 0.$$

§ 11*. Fonctions de seconde espèce

1. Propriétés fondamentales. Ainsi qu'il a été montré au § 5, les fonctions de seconde espèce

$$q_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(\xi)\rho(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \notin [a, b], \tag{1}$$

constituent les secondes solutions de la relation de récurrence pour des polynômes orthogonaux quelconques $p_n(x)$. Etudions plus en détail les propriétés des fonctions de seconde espèce $q_n(z)$ correspondant aux polynômes orthogonaux classiques. A cet effet, utilisons la formule de Rodrigues:

$$q_n(z) = \int_a^b \frac{p_n(\xi)\rho(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = A_n \int_a^b \frac{1}{\xi - z} \frac{d^n}{d\xi^n}[\sigma^n(\xi)\rho(\xi)]\, d\xi.$$

Intégrant par parties n fois, on obtient

$$q_n(z) = A_n n! \int_a^b \frac{\sigma^n(\xi)\rho(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi,$$

$$z \notin [a, b]$$

(on s'assure aisément que les substitutions s'annulent). La fonction

$$Q_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} q_n(z) = \frac{A_n n!}{\rho(z)} \int_a^b \frac{\sigma^n(\xi)\rho(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \tag{2}$$

est évidemment une fonction du type hypergéométrique. La condition (8) du § 10 est vérifiée pour le contour C. Puisque la représentation intégrale (2) pour $Q_n(z)$ ne diffère de la représentation intégrale (18) du § 7 pour $p_n(z)$ que par le facteur constant $\frac{1}{2\pi i}$ et par le contour choisi, les fonctions $p_n(z)$ et $Q_n(z)$ vérifient les mêmes équations différentielles et les mêmes relations de récurrence. La fonction $Q_n(z)$, qui ne diffère de $q_n(z)$ que par un facteur indépendant de n, sera toujours appelée *fonction de seconde espèce*.

Si la fonction $\rho(z)$ admet un point de ramification pour $z = a$ et $z = b$, il faut rendre la fonction $Q_n(z)$ uniforme en pratiquant certaines coupures sur le plan de la variable complexe z, par exemple la coupure $(a, +\infty)$, allant du point $z = a$ à droite le long de l'axe réel. Ce faisant, on suppose que $\rho(x + i0) = \rho(x)$ pour $x \in (a, b)$.

De la forme explicite de la fonction $Q_n(z)$ définie par les formules (1) et (2), on peut tirer le *développement asymptotique* de $Q_n(z)$ pour

les grandes valeurs de $|z|$. A cet effet, utilisons l'égalité

$$\frac{1}{\xi-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\xi/z}=-\frac{1}{z}\left[\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{\xi}{z}\right)^k+\frac{(\xi/z)^{p+1}}{1-\xi/z}\right]=$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{\xi}{z}\right)^k+\frac{\xi^{p+1}}{(\xi-z)\,z^{p+1}}\,. \quad (3)$$

Intégrant (3) par rapport au poids $p_n(\xi)\rho(\xi)$ dans les limites de a à b, on obtient

$$\rho(z)\,Q_n(z)=-\sum_{k=n}^{p}\frac{1}{z^{k+1}}\int_a^b \xi^k p_n(\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi+\frac{r_p(z)}{z^{p+1}}, \quad (4)$$

où

$$r_p(z)=\int_a^b \frac{\xi^{p+1}p_n(\xi)\,\rho(\xi)}{\xi-z}\,d\xi.$$

Nous avons employé, au cours de l'intégration, la propriété d'orthogonalité (8) du § 4.

Si la plus courte distance du point z à l'intervalle (a, b) tend vers l'infini, on tire de $|r_p(z)|\to 0$ et de l'égalité (4) le développement asymptotique de la fonction de seconde espèce $Q_n(z)$. En particulier, pour $p=n+1$, on tire de (4)

$$Q_n(z)=-\frac{d_n^2}{a_n}\frac{1}{\rho(z)\,z^{n+1}}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \quad (5)$$

Pour connaître les propriétés des fonctions de seconde espèce, écrivons l'expression de $Q_n(z)$ comme suit:

$$Q_n(z)=\frac{1}{\rho(z)}\left[\int_a^b \frac{p_n(\xi)-p_n(z)}{\xi-z}\,\rho(\xi)\,d\xi+p_n(z)\int_a^b\frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi-z}\right].$$

D'après le théorème de Bezout, la première intégrale du second membre est un polynôme $\pi_{n-1}(z)$ de degré $(n-1)$; la deuxième intégrale s'exprime à l'aide de la fonction $Q_0(z)$. On a donc

$$Q_n(z)=\frac{p_n(z)}{p_0(z)}\,Q_0(z)+\frac{1}{\rho(z)}\,\pi_{n-1}(z). \quad (6)$$

Toutes les singularités de la seconde solution de $Q_n(z)$ sont donc définies par le comportement des fonctions $Q_0(z)$ et $\frac{1}{\rho(z)}$. Par ailleurs, on peut se faire une idée du comportement de la seconde solution de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques avec $z\to a$ ou $z\to b$ (a ou b prenant des valeurs finies) en s'appuyant

sur le corollaire du théorème 4 du § 1 pour $k(z) = \sigma(z)\rho(z)$ et $m = 0$. En particulier, la fonction de Jacobi de seconde espèce $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ sera non bornée pour $z \to -1$ si $\beta \geqslant 0$, ou, respectivement, pour $z \to 1$ si $\alpha \geqslant 0$. De même, la fonction de Laguerre de seconde espèce $Q_n^\alpha(z)$ sera non bornée pour $z \to 0$ si $\alpha \geqslant 0$.

Comparant (2) avec les égalités (5) et (7) du § 10, on constate que

$$Q_0'(z) = \frac{k_0 A_0}{\sigma(z)\rho(z)} \int_a^b \rho(x)\,dx, \quad k_0 = -\frac{1}{2}\sigma'' + \tau'.$$

D'où

$$Q_0(z) = Q_0(z_0) - C \int_z^{z_0} \frac{d\xi}{\sigma(\xi)\rho(\xi)}, \tag{7}$$

$$C = k_0 A_0 \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{8}$$

En qualité de z_0, il y a intérêt à choisir une valeur de z telle que $Q_0(z_0) = 0$. Puisque $Q_0(z_0) \neq 0$ pour toute valeur finie de $z_0 \notin [a, b]$ (voir § 5, 3), il est logique de considérer le comportement de $Q_0(z)$ pour $z \to \infty$. On voit de la représentation asymptotique (5) que pour les fonctions de Laguerre de seconde espèce $Q_0^\alpha(z)$ on peut poser $z_0 = -\infty$, tandis que pour les fonctions d'Hermite de seconde espèce $z_0 = \pm i\infty$. En ce qui concerne les fonctions de Jacobi de seconde espèce $Q_0^{(\alpha,\beta)}(z)$, on prendra $z_0 = \infty$ pour $\alpha + \beta > -1$.

Il découle de (7) que pour $z \to x$ avec $x \in (a, b)$ il existe des limites de $Q_0(x \pm i0)$; donc, en vertu de (6), il y a aussi des valeurs limites de $Q_n(x \pm i0)$. Puisque, conformément à (2),

$$\overline{\rho(z)\,Q_n(z)} = \rho(\bar{z})\,Q_n(\bar{z})$$

(la barre symbolisant la conjuguée complexe), il est préférable de choisir pour $z = x$ en qualité de seconde solution de $Q_n(x)$ de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques non pas $Q_n(x \pm i0)$ mais la combinaison réelle de ces fonctions

$$\rho(x)\,Q_n(x) = \frac{1}{2}[\rho(x+i0)\,Q_n(x+i0) + \rho(x-i0)\,Q_n(x-i0)]$$

(rappelons que $\rho(x + i0) = \rho(x)$).

On peut montrer que la fonction $Q_n(x)$ ainsi définie vérifiera les mêmes relations que le polynôme $p_n(x)$ pour $x \in (a, b)$. La représentation intégrale (1) reste aussi vraie, à condition cependant qu'on comprenne l'intégrale au sens de la valeur principale *).

*) Pour une étude plus approfondie des propriétés des fonctions de seconde espèce, voir l'article de V. O u v a r o v « Théorie de la seconde solution de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques », Rapports de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., 125, 2, 1959.

Il découle de la formule (7) que la fonction $Q_0(z)$ se réduit pour les polynômes de Jacobi à la *fonction bêta incomplète* $B_x(p, q)$, pour les polynômes de Laguerre à la *fonction gamma incomplète* $\Gamma(a, x)$, et pour les polynômes d'Hermite, à la *fonction des erreurs* $\Phi(x)$. Ici

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt,$$

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1}\,dt, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

2. Quelques fonctions spéciales s'apparentant aux fonctions de seconde espèce d'ordre zéro.

1) Pour la *fonction de Laguerre de seconde espèce* on a, en posant dans (7) $z_0 = -\infty$:

$$Q_0(z) \equiv Q_0^\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1) \int_z^{-\infty} \frac{d\xi}{\sigma(\xi)\rho(\xi)} = \Gamma(\alpha+1) \int_z^{-\infty} \frac{e^\xi}{\xi^{\alpha+1}}\,d\xi. \tag{9}$$

Pour des valeurs entières de $\alpha = m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots$), la fonction $Q_0^\alpha(z)$ s'exprime à l'aide des fonctions

$$E_m(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zs}}{s^m}\,ds, \quad \operatorname{Re} z > 0 \tag{10}$$

fréquemment employées, par exemple, dans les problèmes de propagation du rayonnement dans la matière, en théorie des piles nucléaires *). Les fonctions $E_m(z)$ sont connues sous l'appellation d'*exponentielles intégrales*.

Posant dans (9) $\xi = -zs$, $\alpha = m - 1$, on a pour $z > 0$

$$Q_0^{m-1}(-z) = (m-1)! \int_{-z}^{-\infty} \frac{e^\xi}{\xi^m}\,d\xi =$$

$$= \frac{(m-1)!}{(-z)^{m-1}} \int_1^\infty \frac{e^{-zs}}{s^m}\,ds = \frac{(m-1)!}{(-z)^{m-1}} E_m(z). \tag{11}$$

Grâce à la relation (11), on arrive à définir $E_m(z)$ pour toute valeur complexe de z.

Utilisant la représentation asymptotique (5) pour $Q_0(z)$, on trouve sans peine la *représentation asymptotique* pour la fonction

*) Cf. Y. Zeldovitch, Y. Raizer, Physique des ondes de choc et des phénomènes hydrodynamiques à haute température, « Naouka », 1966; A. Galanine, Théorie des réacteurs nucléaires à neutrons thermiques, Atomizdat, 1959.

$E_m(z)$:

$$E_m(z)=\frac{e^{-z}}{z}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{12}$$

Afin d'obtenir les *relations de récurrence* pour les fonctions $E_m(z)$, procédons dans (10) à l'intégration par parties:

$$E_{m+1}(z)=\int_1^\infty \frac{e^{-zs}}{s^{m+1}}\,ds=-\frac{1}{m}\frac{e^{-zs}}{s^m}\Big|_1^\infty-\frac{z}{m}\int_1^\infty \frac{e^{-zs}}{s^m}\,ds=$$

$$=\frac{1}{m}\left[e^{-z}-zE_m(z)\right]. \tag{13}$$

Dérivant par rapport à z dans (10) sous le signe d'intégration, on obtient sans peine la *formule de dérivation*:

$$E'_m(z)=-E_{m-1}(z).$$

Etudions maintenant le comportement de la fonction $E_m(z)$ pour $z\to 0$. Pour cela, en vertu de (13), il suffit d'examiner le comportement de la fonction $E_1(z)$. Selon (11), on a

$$E_1(z)=\int_{-z}^{-\infty}\frac{e^s}{s}\,ds=\int_z^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds.$$

Il s'ensuit que pour $z\to 0$ la fonction $E_1(z)$ a une singularité. Pour l'isoler, faisons quelques transformations identiques:

$$E_1(z)=\int_z^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds=\int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds+\int_z^1 \frac{e^{-s}-1}{s}\,ds+\int_z^1\frac{ds}{s}=$$

$$=C-\ln z-\int_0^z \frac{e^{-s}-1}{s}\,ds,$$

où

$$C=\int_1^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds+\int_0^1 \frac{e^{-s}-1}{s}\,ds.$$

Développant e^{-s} suivant les puissances de s et intégrant terme à terme, on obtient le développement de la fonction $E_1(z)$ suivant les puissances de z:

$$E_1(z)=C-\ln z+\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{z^k}{k!}. \tag{14}$$

Pour calculer la constante C, intégrons par parties:

$$C = e^{-s}\ln s\Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-s}\ln s\,ds + (e^{-s}-1)\ln s\Big|_0^1 +$$
$$+ \int_0^1 e^{-s}\ln s\,ds = \int_0^\infty e^{-s}\ln s\,ds = \Gamma'(1) = -\gamma$$

(γ est la constante d'Euler).

Remarquons qu'à côté de $E_1(z)$ on emploie souvent, en pratique, la fonction $\mathrm{Ei}(z)$ dite *fonction exponentielle intégrale*, apparentée à $E_1(z)$ et liée à cette dernière par la relation

$$E_1(z) = -\mathrm{Ei}(-z),$$

ainsi que les fonctions

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi, \quad \mathrm{Ci}(z) = \int_\infty^z \frac{\cos\xi}{\xi}\,d\xi,$$

appelées *sinus intégral* et *cosinus intégral*. Pour $z>0$, on a

$$E_1(iz) = \int_{iz}^\infty \frac{e^{-s}}{s}\,ds = \int_z^\infty \frac{e^{-it}}{t}\,dt =$$
$$= \int_z^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt - i\int_z^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = -\left\{\mathrm{Ci}(z) + i\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}(z)\right]\right\},$$

car

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi donc, pour $z>0$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Ci}(z) &= -\frac{1}{2}[E_1(iz) + E_1(-iz)], \\ \mathrm{Si}(z) &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}[E_1(iz) - E_1(-iz)]. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

En vertu du principe de prolongement analytique, les relations (15) restent vraies dans un domaine plus vaste de variation de z.

On tire sans peine des formules (12), (14), (15) les *représentations* et *développements asymptotiques* de $\mathrm{Si}(z)$ et de $\mathrm{Ci}(z)$ pour des $|z|$

petits. On a par exemple

$$\mathrm{Si}\,(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+1)\,!},$$

$$\mathrm{Ci}\,(z)=\gamma+\ln z-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}z^{2k}}{2k\,(2k)\,!}.$$

La fonction Si (z) est analytique dans tout le plan complexe, alors que Ci (z) ne l'est que dans le plan présentant une coupure le long du demi-axe ($-\infty$, 0).

2) Pour la *fonction d'Hermite de seconde espèce*, quand on pose dans (7) $z_0=\pm i\infty$ (le signe coïncide avec celui de Im z), il vient

$$Q_0(z)=C\int_z^{\pm i\infty}e^{\xi^2}\,d\xi,$$

où

$$C=-k_0A_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=2\sqrt{\pi}.$$

On exprime aisément la fonction Q_0 (z) à l'aide de la *fonction des erreurs*

$$\Phi\,(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}\,d\xi \tag{16}$$

dont l'emploi est très large dans bon nombre de problèmes (propagation de la chaleur, théorie des probabilités, etc.). En effet, pour $z>0$ on a

$$Q_0(iz)=2\sqrt{\pi}\int_{iz}^{i\infty}e^{\xi^2}\,d\xi=2\sqrt{\pi}\,i\int_z^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi=\pi i\,[1-\Phi\,(z)].$$

Utilisant la représentation asymptotique (5) pour Q_0 (z), on trouve facilement la *représentation asymptotique pour la fonction des erreurs*:

$$\Phi\,(z)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{z}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Le *développement de la fonction* Φ (z) *suivant les puissances de* z peut être obtenu en développant en série $e^{-\xi^2}$ dans (16) et en intégrant terme à terme:

$$\Phi\,(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k\,!\,(2k+1)}.$$

A la fonction des erreurs sont étroitement liées les *intégrales de Fresnel*

$$S(z)=\int_0^z \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\qquad C(z)=\int_0^z \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt.$$

En effet, pour $z>0$ on a

$$C(z)-iS(z)=\int_0^z e^{-i\frac{\pi t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2i}}\,\Phi\left(\sqrt{i\,\frac{\pi}{2}}\,z\right).$$

La relation ainsi établie permet d'obtenir le comportement asymptotique et le développement en série des intégrales de Fresnel.

§ 12. Représentations asymptotiques en cas de valeurs élevées de n

1. Réduction de l'équation différentielle à la forme élémentaire. A l'aide de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques

$$[\sigma(x)\,\rho(x)\,y'(x)]'+\lambda\rho(x)\,y(x)=0\quad(a\leqslant x\leqslant b)\tag{1}$$

on obtient, pour ces derniers, des représentations asymptotiques simples avec $n\to\infty$, ce qui correspond à $\lambda\to\infty$. Pour le faire, cherchons tout d'abord à mettre l'équation différentielle (1) sous sa forme la plus simple par la méthode de changement de variables. Remarquons que l'équation

$$[k(x)\,y'(x)]'+[\lambda r(x)-p(x)]\,y(x)=0\tag{2}$$

peut être toujours réduite par changement de variables

$$y=\varphi(x)\,u(s),\qquad s=s(x)\tag{3}$$

à la forme

$$u''(s)+[\lambda-q(s)]\,u(s)=0\tag{4}$$

si les fonctions $\varphi(x)$ et $s(x)$ sont choisies de façon convenable. En effet, si l'on porte (3) dans (2), on constate que l'équation (2) se réduit à la forme (4) si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\left.\begin{aligned}&[s'(x)]^2=\frac{r(x)}{k(x)},\quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-\frac{1}{2}\,\frac{(ks')'}{ks'}=-\frac{1}{4}\,\frac{[k(x)\,r(x)]'}{k(x)\,r(x)},\\ &q(s)=\frac{p(x)}{r(x)}-\frac{[k(x)\,\varphi'(x)]'}{r(x)\,\varphi(x)}.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Pour les polynômes orthogonaux classiques on a $k(x)=\sigma(x)\rho(x)$, $r(x)=\rho(x)$, $p(x)=0$, et les conditions (5) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}&[s'(x)]^2=\frac{1}{\sigma(x)},\quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-\frac{[\sigma(x)\,\rho^2(x)]'}{4\sigma(x)\,\rho^2(x)}=\frac{\sigma'(x)-2\tau(x)}{4\sigma(x)},\\ &q(s)=\frac{2\tau'(x)-\sigma''(x)}{4}+\frac{[\sigma'(x)-2\tau(x)]\,[3\sigma'(x)-2\tau(x)]}{16\sigma(x)}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Pour cette raison on peut poser, en particulier,

$$s(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{\sigma(t)}}, \tag{7}$$

$$\varphi(x)=A\,[\sigma(x)\,\rho^2(x)]^{-1/4}, \tag{8}$$

où x_0 et A sont des constantes. Par la suite on admettra que a prend une valeur finie, car les polynômes correspondant au cas $a=-\infty$ peuvent être exprimés en fonction des polynômes de Laguerre (voir § 6, 3 et § 7, 4). On choisit donc dans (7) $x_0=a$.

La fonction $\sigma(x)$ ne s'annulant que pour $x=a$ ou $x=b$, la fonction $s(x)$ sera continue et monotonement croissante si $a\leqslant x<b$, et on peut en conclure qu'il existe la fonction inverse $x=x(s)$ continue et monotonement croissante. Pour $a<x<b$ la fonction $q(s)$ sera une fonction continue de la variable x et, par conséquent, de la variable s aussi. La fonction $q(s)$ ne peut donc avoir des singularités que pour $s=0$ ou $s=s_0$, où $s_0=s(b)$. Pour n'avoir à considérer qu'un seul point singulier de la fonction $q(s)$, nous étudions l'équation (4) pour $0\leqslant s<s_0$.

Essayons de comprendre la nature de la singularité de la fonction $q(s)$ et le comportement de la fonction $\varphi(x)$ pour $x\to a$, c.-à-d. pour $s\to 0$. Si $x\approx a$, alors $\sigma(x)\approx\sigma'(a)(x-a)$; donc,

$$s=\int_a^x\frac{dt}{\sqrt{\sigma(t)}}\approx 2\sqrt{\frac{x-a}{\sigma'(a)}},$$

d'où

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\approx\frac{1}{2(x-a)}\left[\frac{1}{2}-\frac{\tau(a)}{\sigma'(a)}\right]. \tag{9}$$

Il est commode d'introduire la notation

$$\nu=\frac{\tau(a)}{\sigma'(a)}-1.$$

On vérifie sans peine que pour les polynômes de Jacobi $\nu=\beta$ et pour ceux de Laguerre $\nu=\alpha$. Aussi peut-on considérer que $\nu>-1$. Utilisant l'équation (9) pour $\varphi(x)$, on a pour $x\approx a$:

$$\varphi(x)\approx C(x-a)^{-1/2(\nu+1/2)}\approx Ds^{-(\nu+1/2)},$$

d'où

$$u(s)\approx\frac{y(a)}{D}s^{\nu+1/2}.$$

Ici C et D sont des constantes. On choisit la constante A dans l'expression (8) pour $\varphi(x)$ de telle façon que $D=y(a)$. Alors

$$\lim_{s\to 0}\frac{u(s)}{s^{\nu+1/2}}=1.$$

Des estimations plus détaillées entraînent la relation suivante pour $s \to 0$:

$$\frac{u(s)}{s^{\nu+1/2}} = 1 + O(s^2). \tag{10}$$

D'autre part, en développant dans (6) l'expression de $q(s)$ suivant les puissances de $x - a \approx 1/4\sigma'(a)\, s^2$, on obtient pour $s \approx 0$

$$q(s) \approx q_0 + \frac{q_1}{s^2}, \quad q_1 = \nu^2 - \frac{1}{4}$$

(q_0 étant une constante). Il en découle que pour $0 \leqslant s < s_0$ la fonction $q(s)$ peut être représentée sous la forme

$$q(s) = \frac{\nu^2 - 1/4}{s^2} + f(s),$$

où $f(s)$ est une fonction continue.

Nous avons donc ramené l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux classiques à l'étude du comportement asymptotique, pour $\lambda \to \infty$, de la solution de l'équation différentielle

$$u''(s) + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - 1/4}{s^2}\right) u(s) = f(s)\, u(s) \quad (0 \leqslant s < s_0) \tag{11}$$

avec la condition initiale (10). Rappelons que la fonction $y(x)$ est liée à $u(s)$ par la relation

$$y(x) = A\,[\sigma(x)\,\rho^2(x)]^{-1/4}\, u(s), \quad s = \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{\sigma(t)}}$$

et que la constante A est choisie à partir de la condition

$$\lim_{s \to 0} \frac{u(s)}{s^{\nu+1/2}} = 1,$$

de sorte que

$$A = y(a) \lim_{x \to a} \frac{[\sigma(x)\,\rho^2(x)]^{1/4}}{[s(x)]^{\nu+1/2}}.$$

Pour les polynômes de Jacobi on a

$$a = -1, \quad \nu = \beta, \quad \lambda = \lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1),$$
$$s = \arccos(-x),$$

$$A = P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)\, 2^{\frac{\alpha-\beta}{2}} = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(1)\, 2^{\frac{\alpha-\beta}{2}} =$$
$$= (-1)^n \frac{2^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)},$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n\, 2^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)} \frac{u(s)}{(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}}. \tag{12}$$

Pour les polynômes de Laguerre on a

$$a=0, \quad \nu=\alpha, \quad \lambda=\lambda_n=n, \quad s=2\sqrt{x},$$

$$A=L_n^\alpha(0)\,2^{-\alpha-1/2}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^{\alpha+1/2}n!\,\Gamma(\alpha+1)},$$

$$L_n^\alpha(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^{\alpha+1/2}n!\,\Gamma(\alpha+1)}\frac{e^{x/2}}{x^{\alpha/2+1/4}}u(s). \tag{13}$$

2. Recherche des représentations asymptotiques par la méthode de Steklov. La méthode proposée par V. Steklov *) permet d'obtenir les représentations asymptotiques pour la fonction $u(s)$. Cherchons à résoudre l'équation (11) par la méthode de variation des constantes, le second membre étant considéré comme une fonction connue. Suivant cette méthode, la solution générale de l'équation non homogène

$$u''(x)+a(x)u(x)=F(x)$$

a la forme

$$u(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+\\ +\frac{1}{W(u_1,u_2)}\int_{x_0}^{x}F(\xi)\,[u_1(\xi)u_2(\xi)-u_1(x)u_2(\xi)]\,d\xi.$$

Ici $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène correspondante; C_1 et C_2 sont des constantes qu'on définit à partir des conditions initiales pour $x=x_0$;

$$W(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x)\end{vmatrix}$$

est le wronskien. Rappelons que pour les solutions linéairement indépendantes $u_1(x)$ et $u_2(x)$ le wronskien $W(u_1,u_2)=\text{const}\neq 0$.

Appliquant la méthode de variation des constantes à l'équation (11), on a

$$u(s)=C_1u_1(s)+C_2u_2(s)+\int_0^s K(s,\xi)\,f(\xi)\,u(\xi)\,d\xi. \tag{14}$$

Ici

$$K(s,\xi)=\frac{1}{W(u_1,u_2)}[u_1(\xi)u_2(s)-u_1(s)u_2(\xi)], \tag{15}$$

---

*) Voir V. Steklov, Sur le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles linéaires, Editions de l'Université de Kharkov, 1956.

$u_1(s)$ et $u_2(s)$ sont les solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$u'' + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - 1/4}{s^2}\right) u = 0.$$

Pour se débarrasser de la constante λ dans cette équation, il suffit de changer d'échelle en posant $\sqrt{\lambda}\, s = t$, $u(s) = v(t)$:

$$v'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{t^2}\right) v = 0. \tag{16}$$

Les solutions de l'équation (16) s'expriment à l'aide des fonctions cylindriques d'ordre ν, lesquelles seront étudiées au chapitre III. Pour une des solutions de l'équation (16) on peut prendre la fonction $v_1(t) = A_1 \sqrt{t}\, J_\nu(t)$ (A_1 est la constante de normalisation, $J_\nu(t)$ la fonction de Bessel de première espèce; voir § 18), pour la seconde solution, la fonction $v_2(t) = A_2 \sqrt{t}\, Z_\nu(t)$, où $Z_\nu(t)$ est une fonction cylindrique arbitraire linéairement indépendante avec $J_\nu(t)$.

En vertu des propriétés des fonctions cylindriques, on choisira les constantes de normalisation et la fonction $Z_\nu(t)$ de telle façon que les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ jouissent des propriétés suivantes:

1) Pour $t \to 0$

$$v_1(t) = t^{1/2+\nu}[1 + O(t^2)], \qquad v_2(t) = Bt^{1/2-\nu}[1 + O(t^2)]$$

(si $\nu = 0$, alors $v_2(t) = B\sqrt{t}\ln[1 + O(t^2)]$).

2) Pour $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$|v_1(t)| \leqslant Ct^{1/2+\nu}, \quad |v_2(t)| \leqslant Ct^{1/2-\nu}.$$

3) Pour $t > 1$

$$|v_1(t)| \leqslant C, \quad |v_2(t)| \leqslant C.$$

4) $W(v_1, v_2) = v_1(t)\, v_2'(t) - v_1'(t)\, v_2(t) = 1$.

Ici B et C sont des constantes. La fonction $v_1(t)$ est liée à la fonction de Bessel $J_\nu(t)$ par la relation

$$v_1(t) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \sqrt{t}\, J_\nu(t). \tag{17}$$

Dans tous nos raisonnements ultérieurs, il sera supposé que $\nu \neq 0$. Les modifications pour le cas de $\nu = 0$ sont évidentes.

Pour la fonction $K(s, \xi)$ on obtient l'expression

$$K(s, \xi) \equiv K_\mu(s, \xi) = \frac{1}{\mu}[v_1(\mu\xi)\, v_2(\mu s) - v_1(\mu s)\, v_2(\mu\xi)], \quad \mu = \sqrt{\lambda}. \tag{18}$$

Déterminons les constantes C_1 et C_2 dans l'égalité (14). Puisque la fonction $f(s)$ est continue et qu'on a pour $s \to 0$ $u(s) \approx s^{\nu+1/2}$ il vient pour les faibles valeurs de s

$$\int_0^s K_\mu(s, \xi) f(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \approx f(0) \int_0^s K_\mu(s, \xi)\, \xi^{\nu+1/2}\, d\xi.$$

Considérant le comportement des fonctions $v_1(\mu s)$ et $v_2(\mu s)$ figurant dans l'expression (18) pour $K_\mu(s, \xi)$ dans le cas de $s \to 0$, on s'assure aisément que

$$\int_0^s K_\mu(s, \xi) f(\xi) u(\xi) d\xi = O(s^{\nu+5/2}).$$

Comparant le comportement du premier et du second membre de l'égalité (14) pour $s \to 0$, on trouve, en vertu de (10), que $C_1 = \mu^{-\nu-1/2}$, $C_2 = 0$, c.-à-d. que

$$u(s) = \frac{1}{\mu^{\nu+1/2}} [v_1(\mu s) + R_\mu(s)], \tag{19}$$

où

$$R_\mu(s) = \mu^{\nu+1/2} \int_0^s K_\mu(s, \xi) f(\xi) u(\xi) d\xi.$$

Montrons que la quantité $R_\mu(s)$ dans (19) peut être négligée, à condition que les μ soient suffisamment grands. Donnons d'abord l'estimation de la quantité

$$M = \max_{\mu s \leqslant 1} \frac{|u(s)|}{s^{\nu+1/2}}.$$

Utilisant l'inégalité $s \leqslant 1/\mu$, on suppose naturellement que $1/\mu < s_0$. Cela est toujours réalisable avec des μ suffisamment grands, c.-à-d. pour $\mu \geqslant \mu_0$, où $1/\mu_0 < s_0$. Comme, pour $\mu s \leqslant 1$, il découle de l'égalité (18) et des estimations données ci-dessus pour les fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ que

$$|K_\mu(s, \xi)| \leqslant C^2 \sqrt{s\xi} \left[\left(\frac{\xi}{s}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\xi}\right)^\nu \right],$$

on a

$$\frac{1}{s^{\nu+1/2}} \left| \int_0^s K_\mu(s, \xi) f(\xi) u(\xi) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s^{\nu+1/2}} \int_0^s |K_\mu(s, \xi) f(\xi) u(\xi) d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant MC^2 \max_{\xi \leqslant 1/\mu_0} |f(\xi)| \int_0^s \left(\frac{\xi}{s}\right)^{\nu+1/2} \sqrt{s\xi} \left[\left(\frac{\xi}{s}\right)^\nu + \left(\frac{s}{\xi}\right)^\nu \right] d\xi =$$

$$= MO(s^2). \tag{20}$$

Il découle donc de l'équation (19) que

$$\frac{|u(s)|}{s^{\nu+1/2}} \leqslant C + MO\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

d'où

$$M \leqslant C + MO\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

Résolvant cette inégalité par rapport à M, il est aisé de s'assurer que la quantité M est uniformément bornée pour toutes les valeurs de μ. L'estimation (20) pour $\mu s \leqslant 1$ nous donne

$$R_\mu(s) = \mu^{\nu+1/2} O(s^{\nu+5/2}).$$

Comme $\nu > -1$, on a $s^{\nu+5/2} \leqslant \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\nu+5/2}$, d'où

$$R_\mu(s) = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \quad (\mu s \leqslant 1).$$

Soit maintenant $\mu s > 1$. Divisons l'intégrale dans l'expression de $R_\mu(s)$ en deux intégrales: dans les limites $(0, 1/\mu)$ et dans les limites $(1/\mu, s)$:

$$R_\mu(s) = R_\mu^{(1)}(s) + R_\mu^{(2)}(s).$$

La quantité $R_\mu^{(1)}(s)$ est évaluée de la même façon que pour $\mu s \leqslant 1$ et donne $O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$. Procédons à l'estimation de $R_\mu^{(2)}(s)$. Pour $\mu s > 1$ et $\mu\xi > 1$ on a en vertu de (18)

$$|K(s, \xi)| \leqslant \frac{2C^2}{\mu}.$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, on obtient

$$\left| \int_{1/\mu}^{s} K_\mu(s, \xi) f(\xi) u(\xi) d\xi \right| \leqslant \frac{2C^2}{\mu} d(\mu) \sqrt{\int_0^s f^2(\xi) d\xi},$$

où

$$d^2(\mu) = \int_0^{s_0} u^2(\xi) d\xi.$$

Ainsi donc, quelle que soit la valeur de $s \leqslant s_0$, on a toujours pour $R_\mu(s)$ l'estimation suivante:

$$|R_\mu(s)| \leqslant O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) + \mu^{\nu-1/2} d(\mu) 2C^2 \sqrt{\int_0^s f^2(\xi) d\xi}. \qquad (21)$$

La quantité $d^2(\mu)$ s'exprime aisément en fonction du carré de la norme d_n^2 du polynôme orthogonal correspondant après le passage de

la variable s à la variable x au moyen des formules (7) et (8). En effet,

$$d^2(\mu)=\int_0^{s_0} u^2(s)\,ds=\int_a^b \frac{y^2(x)}{\varphi^2(x)}\frac{1}{\sqrt{\sigma(x)}}\,dx=\frac{1}{A^2}\int_a^b y^2(x)\,\rho(x)\,dx=\frac{d_n^2}{A^2}.$$

Aussi (voir § 7, 4)

$$d^2(\mu)=\begin{cases}\dfrac{2^{2\beta+1}\Gamma^2(\beta+1)\,n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & \text{(pour les polynômes de Jacobi);}\\[2ex] \dfrac{2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\,n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} & \text{(pour les polynômes de Laguerre).}\end{cases}$$

Pour donner des estimations concrètes de la quantité $R_\mu(s)$, il est commode de se servir de la relation suivante déduite au § 3, 3:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z+a)}{z^a\Gamma(z)}=1.$$

Donnons maintenant les résultats définitifs des estimations asymptotiques des polynômes de Jacobi et de Laguerre. Si $-1\leqslant x\leqslant 1-\delta$ $(\delta>0)$, la fonction $f(s)$ pour les polynômes de Jacobi est bornée, et les formules (12), (17), (19) et (21) donnent

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n\,2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\mu_n^{\beta+1/2}(1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}}\times$$
$$\times\left[\sqrt{\mu_n s}\,J_\beta(\mu_n s)+r_n(x)\right], \qquad (22)$$

où

$$r_n(x)=O\left(\frac{1}{n}\right),\quad s=\arccos(-x),$$
$$\mu_n=\sqrt{\lambda_n}=\sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}.$$

En particulier, pour les polynômes de Legendre on a

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\mu_n}\,(1-x^2)^{1/4}}\left[\sqrt{\mu_n s}\,J_0(\mu_n s)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

où

$$s=\arccos(-x),\quad \mu_n=\sqrt{n(n+1)}.$$

La représentation asymptotique de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ avec $n\to\infty$, $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1$ peut être tirée de (22) au moyen de la formule

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

Pour les polynômes de Laguerre on obtient

$$L_n^\alpha(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,e^{x/2}}{\sqrt{2}\,n!\,\mu_n^{\alpha+1/2}x^{\alpha/2+1/4}}\left[\sqrt{\mu_n s}\,J_\alpha(\mu_n s)+r_n(x)\right], \qquad (23)$$

où

$$r_n(x)=O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)\sqrt{\int_0^s f^2(s)\,ds},$$

$$s=2\sqrt{x},\quad f(s)=\frac{s^2}{16}-\frac{\alpha+1}{2},\quad \mu_n=\sqrt{n}.$$

Pour les polynômes d'Hermite, les formules asymptotiques s'obtiennent à l'aide de (23) si l'on a recours aux formules qui expriment les polynômes d'Hermite en fonction de ceux de Laguerre (voir § 7, 4). Ce faisant, on se rappellera que (voir § 21)

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,\quad J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z.$$

Si dans les formules (22) et (23) $x > \delta \geqslant 0$, alors $\mu_n s \to \infty$ quand $n \to \infty$ et on peut employer la représentation asymptotique de la fonction de Bessel $J_\nu(z)$ pour $z \to \infty$:

$$\sqrt{z}\,J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(z-\frac{\nu+1/2}{2}\pi\right)+O\left(\frac{1}{z}\right).$$

A l'aide de (22) et de (23), il est facile d'obtenir des estimations plus grossières pour les polynômes de Jacobi et de Laguerre au moyen des inégalités

$$|v_1(t)|=|2^\nu\Gamma(\nu+1)\sqrt{t}\,J_\nu(t)|\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases} C & \left(t\geqslant 0,\ \nu+\frac{1}{2}\geqslant 0\right), \\ C(1+t^{1/2+\nu}) & \left(t\geqslant 0,\ \nu+\frac{1}{2}<0\right). \end{cases}$$

Ces inégalités résultent des inégalités pour $v_1(t)$ considérées ci-dessus. Il en vient

$$\left.\begin{aligned} & e^{-x/2}x^{\alpha/2+1/4}\frac{|L_n^\alpha(x)|}{d_n}\leqslant\frac{C_1+C_2x^{5/4}}{(2n+\alpha+1)^{1/4}} \\ & \qquad\qquad \left(\alpha+\frac{1}{2}\geqslant 0,\ x\geqslant 0\right); \\ & (1-x)^{\alpha/2+1/4}(1+x)^{\beta/2+1/4}\frac{|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|}{d_n}\leqslant C_3 \\ & \qquad\qquad \left(\alpha+\frac{1}{2}\geqslant 0,\ \beta+\frac{1}{2}\geqslant 0,\ -1\leqslant x\leqslant 1\right) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

(C_1, C_2, C_3 sont des constantes).

Les estimations analogues pour $L_n^\alpha(x)$ et $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ sont faciles à obtenir également pour le cas où $\alpha + 1/2 < 0$ et $\beta + 1/2 < 0$.

§ 13. Développement des fonctions en séries suivant les polynômes orthogonaux classiques

1. Caractère fermé du système de polynômes orthogonaux classiques. On cherche souvent, en physique mathématique, la solution des problèmes aux limites au moyen du développement de diverses fonctions en séries suivant les polynômes orthogonaux classiques:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x). \tag{1}$$

L'orthogonalité réciproque des polynômes orthogonaux classiques nous permet d'obtenir formellement les coefficients C_n. Intégrant terme à terme la série (1) après l'avoir multipliée par $p_n(x)\rho(x)$, on obtient

$$C_n=\frac{1}{d_n^2}\int_a^b f(x)\, p_n(x)\, \rho(x)\, dx. \tag{2}$$

Pour les coefficients C_n a lieu *l'inégalité de Bessel*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 d_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx \tag{3}$$

qu'on peut démontrer de la façon suivante. On a

$$\int_a^b \Big[f(x)-\sum_{n=0}^{N} C_n p_n(x)\Big]^2 \rho(x)\, dx \geqslant 0.$$

D'où

$$\int_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx-2\sum_{n=0}^{N} C_n \int_a^b f(x)\, p_n(x)\, \rho(x)\, dx+\sum_{n=0}^{N} C_n^2 d_n^2 \geqslant 0$$

ou

$$\int_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx \geqslant \sum_{n=0}^{N} C_n^2 d_n^2.$$

L'inégalité obtenue étant vraie pour tout N, après le passage à la limite pour $N \to \infty$, on trouve l'inégalité de Bessel (3).

Pour que le développement (1) ait lieu dans une classe quelconque de fonctions, il faut que cette classe n'admette pas de fonction $f(x) \not\equiv 0$ telle que les coefficients $C_n = 0$, quelle que soit la valeur de n, c.-à-d. que les égalités

$$\int_a^b f(x)\, p_n(x)\, \rho(x)\, dx=0 \quad (n=0,\ 1,\ \ldots) \tag{4}$$

doivent entraîner $f(x) \equiv 0$. Le système de polynômes possédant cette propriété est dit *fermé*.

Montrons que *tout système de polynômes orthogonaux classiques* $\{p_n(x)\}$ *est fermé pour les fonctions* $f(x)$ *continues et de carré intégrable*

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx < \infty. \tag{5}$$

Notons que cette condition garantit l'existence des coefficients C_n, car, selon l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, on a

$$C_n \leqslant \frac{1}{d_n^2}\sqrt{\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx\int_a^b p_n^2(x)\rho(x)\,dx} < \infty.$$

Pour démontrer que le système de polynômes orthogonaux classiques est fermé, considérons la fonction d'une variable complexe

$$F(z) = \int_a^b e^{ixz}f(x)\rho(x)\,dx. \tag{6}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, on obtient pour $\operatorname{Im} z > C$

$$\left|\int_a^b e^{ixz}f(x)\rho(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b e^{-x\operatorname{Im} z}|f(x)|\rho(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b e^{-Cx}|f(x)|\rho(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b e^{-2Cx}\rho(x)\,dx\int_a^b f^2(x)\rho(x)\,dx}.$$

Pour toute valeur de C l'intégrale $\int_a^b e^{-2Cx}\rho(x)\,dx$ converge pour les polynômes de Jacobi et d'Hermite, et pour $C > -1/2$ elle converge aussi pour les polynômes de Laguerre. En vertu de l'estimation obtenue, l'intégrale définissant $F(z)$ converge donc uniformément dans le demi-plan $\operatorname{Im} z \geqslant C > -\frac{1}{2}$ et, en particulier, dans le cercle $|z| \leqslant R < 1/2$.

Utilisant des estimations analogues, on démontre sans peine la convergence uniforme dans le même domaine des intégrales obtenues après la dérivation en z de l'expression sous le signe d'intégration. Donc, en vertu du théorème 2 du § 1, la fonction $F(z)$ sera analytique dans le cercle en question et l'on pourra, en calculant ses dérivées, effectuer la dérivation sous le signe d'intégration, en particulier,

$$\frac{d^n}{dz^n}F(z)\Big|_{z=0} = i^n\int_a^b x^n f(x)\rho(x)\,dx \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Par hypothèse, les égalités (4) sont vérifiées, de sorte que

$$\int_a^b p_n(x) f(x) \rho(x)\, dx = 0,$$

d'où il résulte immédiatement

$$F^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

D'autre part, on peut développer la fonction $F(z)$ en série de Taylor:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| \leqslant R < \frac{1}{2}.$$

Comme $F^{(n)}(0) = 0$, dans le cercle $|z| \leqslant R < 1/2$ la fonction $F(z) = 0$. Conformément au principe de prolongement analytique, $F(z) = 0$ pour tout z appartenant au domaine d'analyticité de la fonction $F(z)$. En particulier, $F(z) = 0$ pour tout z réel.

Il est évident que la formule (6) pour $F(z)$ peut également s'écrire sous la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz} f(x) \rho(x)\, dx \tag{7}$$

si l'on pose $f(x) \rho(x) = 0$ pour $x < a$ et $x > b$.

Pour des z réels l'expression (7) de $F(z)$ représente le coefficient de développement de la fonction $f(x)\ \rho(x)$ en intégrale de Fourier. Conformément à l'égalité de Parseval, l'intégrale de Fourier a pour expression

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) \rho(x)]^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(z)|^2\, dz = 0,$$

d'où $f(x) \equiv 0$, car $f(x)$ est continue et le poids $\rho(x)$ est positif quand $x \in [a, b]$; or cela contredit notre hypothèse de départ. Donc, *tout système de polynômes orthogonaux classiques est fermé sur l'intervalle* (a, b) *dans la classe des fonctions continues* $f(x)$ *vérifiant la condition d'intégrabilité* (5).

2. Théorèmes de développement. S'appuyant sur le caractère fermé du système de polynômes orthogonaux classiques et sur les estimations obtenues au § 12, on arrive facilement à établir les conditions les plus simples qui permettent le développement (1) pour n'importe quelle fonction $f(x)$. Appliquons-nous à démontrer le théorème suivant.

Théorème 1. *Supposons que la fonction* $f(x)$ *est continue pour* $a < x < b$, *qu'elle admet une dérivée continue par morceaux dans ce*

domaine et que les intégrales $\int\limits_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx$, $\int\limits_a^b [f'(x)]^2\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx$ *sont convergentes. Le développement* (1) *est alors valable, la série dans* (1) *étant uniformément convergente en* x *pour* $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$.

Démonstration. Cherchons d'abord à évaluer les coefficients de Fourier C_n. Vu que l'intégrale $\int\limits_a^b [f'(x)]^2\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx$ converge, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{n,1}^2 d_{n,1}^2$ doit aussi être convergente selon l'inégalité de Bessel, et on a dans cette série

$$C_{n,1} = \frac{1}{d_{n,1}^2} \int\limits_a^b f'(x)\,p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx,$$

$$d_{n,1}^2 = \int\limits_a^b [p_n'(x)]^2\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx.$$

Etablissons la relation entre les coefficients $C_{n,1}$ et C_n. A l'aide de l'équation différentielle (9) du § 7, pour $a < x_1 < x_2 < b$, on obtient

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}[f(x)\,p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)]\,dx = [f(x)\,p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)]\Big|_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} f'(x)\,p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx - \lambda_n \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,p_n(x)\,\rho(x)\,dx. \qquad (8)$$

Montrons que

$$f(x)\,p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x) \to 0$$

pour $x \to a$ et pour $x \to b$. Pour cela, donnons à x_2 dans (8) une valeur fixée et considérons le passage à la limite $x_1 \to a$. Les intégrales du second membre de (8) ont les limites finies conformément aux conditions du théorème. Aussi

$$f(x_1)\,p_n'(x_1)\,\sigma(x_1)\,\rho(x_1) \xrightarrow[x_1 \to a]{} D_n$$

(D_n est une constante). Montrons que $D_n = 0$, quel que soit n. En effet, soit $D_n \neq 0$ pour une certaine valeur de n. Alors pour $x \to a$

$$f(x) \approx \frac{D_n}{p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)}.$$

La relation limite obtenue contredit la convergence de l'intégrale $\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx$. Le cas $x_2 \to b$ est considéré de façon analogue.

On vient de montrer donc que

$$[f(x)\,p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)]\,\Big|_a^b = 0,$$

c.-à-d. que

$$\int_a^b f'(x)\,p_n'(x)\,\sigma(x)\,\rho(x)\,dx = \lambda_n \int_a^b f(x)\,p_n(x)\,\rho(x)\,dx.$$

En particulier, lorsque $f(x) = p_n(x)$, on a $d_{n,1}^2 = \lambda_n d_n^2$, d'où $C_{n,1} = C_n$. Puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1}^2 d_{n,1}^2$ est convergente, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n C_n^2 d_n^2$ doit l'être aussi.

Montrons maintenant que la série (1) qui nous intéresse converge uniformément pour $a < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < b$. Appliquant l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, on a

$$\left|\sum_{n=N_1}^{N_2} C_n p_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} |C_n d_n \sqrt{\lambda_n}|\, \frac{|p_n(x)|}{\sqrt{\lambda_n}\, d_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} C_n^2 d_n^2 \lambda_n \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{p_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 d_n^2 \lambda_n} \cdot \sqrt{\sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{p_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}}. \qquad (9)$$

La série $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{p_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ converge uniformément dans le domaine considéré; il est facile de le montrer à l'aide des estimations grossières obtenues pour $p_n(x)$ au § 12. En effet, pour les polynômes de Laguerre $p_n(x) = L_n^{\alpha}(x)$, par exemple, quand $\alpha + {}^1/_2 > 0$ on a en vertu de l'estimation (24) du § 12

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{p_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2} \leqslant e^x x^{-(\alpha+1/2)} (C_1 + C_2 x^{5/4})^2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n\,(2n+\alpha+1)^{1/2}}. \qquad (10)$$

De cette inégalité découle immédiatement la convergence uniforme dans le domaine $0 < \delta \leqslant x \leqslant x_0 < \infty$ (x_0 est un nombre arbitraire)

de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^2(x)}{\lambda_n d_n^2}$ pour $p_n(x) = L_n^{\alpha}(x)$. Dans les autres cas, la démonstration se fait de façon analogue. On voit donc qu'en vertu des estimations (9) la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x)$ converge uniformément et représente, par conséquent, une fonction continue.

Considérons la fonction

$$\bar{f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} C_k p_k(x).$$

Cherchons les coefficients de Fourier de son développement en série suivant les polynômes $p_n(x)$. On a

$$\int_a^b \bar{f}(x)\, p_n(x)\, \rho(x)\, dx = \int_a^b p_n(x)\, \rho(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} C_k p_k(x) \right] dx =$$

$$= C_n d_n^2 - \sum_{k=0}^{N-1} C_k \int_a^b p_n(x)\, p_k(x)\, \rho(x)\, dx - I_N, \qquad (11)$$

où

$$I_N = \int_a^b p_n(x)\, \rho(x) \left[\sum_{k=N}^{\infty} C_k p_k(x) \right] dx.$$

Donnons l'estimation de I_N à l'aide de l'inégalité (9):

$$|I_N| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 d_k^2 \lambda_k} \int_a^b |p_n(x)|\, \rho(x) \sqrt{\sum_{k=N}^{\infty} \frac{p_k^2(x)}{\lambda_k d_k^2}}\, dx.$$

Utilisant les estimations du type (10), on peut montrer que $I_N \to 0$ quand $N \to \infty$. Passant à la limite dans (11), on obtient

$$\int_a^b \bar{f}(x)\, p_n(x)\, \rho(x)\, dx = C_n d_n^2 - \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_a^b p_n(x)\, p_k(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

Comme l'intégrale

$$\int_a^b \bar{f}(x)\, p_n(x)\, \rho(x)\, dx = 0$$

pour tout n et la fonction $\bar{f}(x)$ est continue pour $a < x < b$, on a, en vertu du caractère fermé du système de polynômes orthogonaux classiques, $\bar{f}(x) \equiv 0$ pour $a < x < b$, ce qui démontre la validité

du développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x).$$

On vient de démontrer le théorème de développement pour les fonctions $f(x)$ satisfaisant à des conditions assez restrictives. Avec un mécanisme de démonstration plus compliqué, on arrive à démontrer un théorème de développement plus général. A cet effet, il est commode de réduire d'abord l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques à sa forme élémentaire (voir § 12, 1):

$$u''(s) + [\lambda - q(s)]\, u(s) = 0 \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0). \tag{12}$$

Les fonctions propres de l'équation différentielle initiale deviennent alors les fonctions propres $u = u_n(s)$ de l'équation (12). Désormais, au lieu du théorème de développement suivant les polynômes orthogonaux classiques *), on peut considérer le théorème de développement suivant les fonctions $u_n(s)$, qui s'énonce comme suit.

Théorème 2 (théorème de la convergence simultanée). *Si l'intégrale* $\int_0^{s_0} f^2(s)\, ds$ *converge pour une certaine fonction* $f(s)$, *le développement de cette dernière fonction suivant les fonctions propres de l'équation différentielle* (12) *dans l'intervalle* $0 < s < s_0$ *converge ou diverge en même temps que le développement en série de Fourier trigonométrique sur ce même intervalle* (*si* $s_0 = \infty$, *la série de Fourier est à remplacer par l'intégrale de Fourier*).

§ 14. Problèmes de valeurs propres

1. Position du problème. Dans nombre de problèmes de la mécanique quantique, il s'agit de chercher les niveaux énergétiques et les fonctions d'onde d'une particule se mouvant dans un certain champ de forces **). Si, dans ce mouvement, certaines forces extérieures retiennent la particule dans un domaine limité de l'espace, si bien qu'elle ne peut pas s'éloigner à l'infini, on parle des états liés de la particule. Pour obtenir les fonctions d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$ définissant ces états, ainsi que les niveaux énergétiques correspondants E, on

*) Cette question est traitée dans le livre de B. Levitan et I. Sargsian « Introduction à la théorie spectrale », « Naouka », 1970, et dans l'article de V. Ouvarov « Développement suivant les fonctions propres de l'équation différentielle de la forme $y'' + \lambda y = [q(x) + c/x^2]\, y$ », Revue soviétique « Calcul numérique et physique mathématique », 9, 5, 1969.

**) Nous nous bornons aux problèmes de valeurs propres se posant en mécanique quantique. Il convient de noter par ailleurs qu'en physique mathématique on rencontre aussi des polynômes orthogonaux classiques dans bon nombre de problèmes de valeurs propres.

cherche la solution de l'équation stationnaire de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi + U\psi = E\psi,$$

où $\hbar$ est la constante de Planck, μ la masse de la particule, $U(\boldsymbol{r})$ son énergie potentielle, $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur. 4

La fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$, qui doit être continue, est assujettie à la condition de normalisation

$$\int_v |\psi(\boldsymbol{r})|^2 dv = 1.$$

En examinant les problèmes qui se rencontrent fréquemment en mécanique quantique, l'équation de Schrödinger se réduit à des équations différentielles de la forme

$$\sigma u'' + \tilde{\tau} u' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} + \nu\right) u = 0 \quad (a < x < b), \tag{1}$$

où $\sigma(x)$ est défini par les formules étudiées au § 6, $\tilde{\tau}(x)$ et $\tilde{\sigma}(x)$ sont des polynômes aux coefficients réels de premier et de second degré au plus respectivement, ν est une constante.

On peut écrire l'équation (1) sous forme autoconjuguée:

$$(\sigma\tilde{\rho}u')' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} + \nu\right)\tilde{\rho}u = 0. \tag{2}$$

La fonction $\tilde{\rho}(x) > 0$ qu'on voit ici est solution de l'équation différentielle

$$(\sigma\tilde{\rho})' = \tilde{\tau}\tilde{\rho}. \tag{3}$$

Pour l'équation (2), le problème se pose comme suit: *Trouver toutes les valeurs de ν telles que l'équation différentielle* (2) *ait sur l'intervalle* (a, b) *des solutions non triviales* $u(x, \nu)$ *pour lesquelles les fonctions* $u(x, \nu)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ *sont continues (jusqu'aux valeurs $x = a$ ou $x = b$ si a ou b sont finis) et de carré intégrable, c.-à-d. que l'intégrale* $\int_a^b |u(x, \nu)|^2 \tilde{\rho}(x)\,dx$ *doit converger. Dans le cas où a et b sont finis, il suffit que la fonction* $u(x, \nu)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ *soit continue pour* $x \in [a, b]$.

Comme on a vu au § 10, on peut par le changement de variable $y = \varphi(x)\,u$ réduire l'équation (1) à une équation du type hypergéométrique

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma\rho\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\rho y = 0, \tag{4}$$

où $\lambda = \nu + C$ (C est une constante), la fonction $\rho(x)$ vérifie l'équation différentielle $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, et la fonction $\tau(x)$ est liée aux fonc-

tions $\tilde{\tau}(x)$ et $\varphi(x)$ par la relation $\tau = \tilde{\tau} - 2\frac{\varphi'}{\varphi}\sigma$ (voir § 10, 2). Il découle de cette relation que $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)\varphi^2(x)$. Pour cette raison, *exiger que la fonction* $u(x, \nu)\sqrt{\tilde{\rho}(x)}$ *soit continue et de carré intégrable revient à exiger la même chose de la fonction* $y(x, \lambda)\sqrt{\rho(x)}$. Pour cette raison, nous nous bornerons dans la suite à considérer les problèmes de valeurs propres pour l'équation (4), en supposant que $\rho(x)$ est une fonction non négative bornée pour $x \in [a, b]$.

2. Polynômes orthogonaux classiques comme fonctions propres en certains problèmes de valeurs propres. *Le problème posé pour l'équation* (4) *a comme solutions particulières les polynômes orthogonaux classiques pour* $\lambda = \lambda_n$. *Montrons qu'il n'existe aucune autre fonction ni valeur propres.*

Raisonnons par l'absurde, c.-à-d. qu'il existe, pour un certain λ, une fonction propre $y(x, \lambda) \not\equiv 0$ telle qu'elle ne coïncide avec aucun des polynômes orthogonaux classiques $p_n(x)$. Montrons que dans ce cas la fonction $y(x, \lambda)$ sera orthogonale à tous les polynômes $p_n(x)$. Pour cela, procédons de façon habituelle. On a

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0,$$
$$(\sigma\rho p_n')' + \lambda_n\rho p_n = 0.$$

Multiplions la première équation par $p_n(x)$, la seconde par $y(x, \lambda)$. Puis retranchons terme à terme la seconde équation de la première et faisons l'intégration de x_1 à x_2. Il en vient

$$(\lambda - \lambda_n)\int_{x_1}^{x_2} y(x, \lambda)\, p_n(x)\,\rho(x)\,dx + \sigma(x)\,\rho(x)\left(\frac{dy}{dx}p_n - y\frac{dp_n}{dx}\right)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \tag{5}$$

Quand $\lambda = \lambda_n$, il en découle que

$$\sigma(x)\,\rho(x)\left[\frac{dy}{dx}p_n(x) - y(x, \lambda)\frac{dp_n}{dx}\right] = \sigma(x)\,\rho(x)\,W(p_n, y) = D_n(\lambda),$$

où $D_n(\lambda)$ est une constante. Si $\lambda \neq \lambda_n$, alors pour $x \to a$ et $x \to b$

$$\sigma(x)\,\rho(x)\,W(p_n, y) \to \text{const},$$

puisque l'intégrale $\int_a^b y(x, \lambda)\, p_n(x)\,\rho(x)\,dx$ converge.

Ainsi donc, pour toute valeur propre de λ, la fonction

$$\varphi(x) = \sigma(x)\,\rho(x)\,W(p_n, y)$$

admet une limite finie pour $x \to a$ et $x \to b$. Soit $\varphi(x) \to C$ lorsque $x \to b$. Alors pour $x \to b$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{p_n}\right) = \frac{W(p_n, y)}{p_n^2(x)} \approx \frac{C}{\sigma(x)\,\rho(x)\,p_n^2(x)}.$$

Intégrant la relation obtenue de x_0 à x, avec $x_0 < x < b$ (le point x_0 est choisi à l'extrême droite de tous les zéros du polynôme $p_n(x)$), on a

$$\left.\frac{y}{p_n(x)}\right|_{x_0}^{x} \approx C \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sigma(x)\rho(x)p_n^2(x)}.$$

Substituant les expressions explicites des fonctions $\sigma(x)$ et $\rho(x)$, compte tenu du caractère borné de la fonction $\rho(x)$, on établit le comportement de la fonction $y(x, \lambda)$ pour $x \to b$. Ce comportement entraîne que la fonction $y(x, \lambda)\sqrt{\rho(x)}$ ne sera continue et de carré intégrable que pour $C = 0$. On vient de montrer donc que $\varphi(x) \xrightarrow[x \to b]{} 0$. On montre de même que $\varphi(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

De cette façon, lorsque $\lambda = \lambda_n$, on a

$$\sigma(x)\rho(x) W[p_n(x), y(x, \lambda_n)] = 0 \quad (a < x < b).$$

Puisque $\sigma(x)\rho(x) > 0$, on a $W[p_n(x), y(x, \lambda_n)] = 0$, d'où il découle que la fonction $y(x, \lambda_n)$ et le polynôme $p_n(x)$ sont linéairement dépendants, de sorte que $y(x, \lambda_n) = Ap_n(x)$ (A est une constante).

Par contre, lorsque $\lambda \neq \lambda_n$, on a pour $x_1 \to a$, $x_2 \to b$ à partir de (5)

$$\int_a^b y(x, \lambda)p_n(x)\rho(x)\,dx = 0.$$

Du fait que tout système de polynômes orthogonaux classiques est fermé, on conçoit que la dernière égalité est impossible si $y(x, \lambda) \not\equiv 0$. Ainsi donc, *le problème proposé n'admet d'autres valeurs propres que* $\lambda = \lambda_n$, *ni d'autres fonctions propres que des polynômes orthogonaux classiques* $p_n(x)$.

Nota. Quelquefois, en posant un problème de valeurs propres pour des équations de la forme (4), on exige seulement que la fonction $y(x, \lambda)$ soit bornée si a et b sont finis. Quand $b = \infty$ (ou quand $a = -\infty$), on exige que la fonction $|y(x, \lambda)|$ ne croisse pas plus rapidement qu'une puissance finie de x. Or, pour des problèmes de mécanique quantique, de pareilles exigences sont arbitraires et ne découlent nullement des considérations physiques. Par contre, la condition selon laquelle la fonction $y(x, \lambda)\sqrt{\rho(x)}$ doit être continue et de carré intégrable est moins restrictive et résulte des postulats fondamentaux de la mécanique quantique.

§ 15. Fonctions sphériques

1. Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Les fonctions sphériques constituent une classe importante des fonctions spéciales. On les rencontre par exemple en résolvant

l'équation de Laplace par la méthode de séparation des variables en coordonnées sphériques. Pour cette raison, les fonctions sphériques sont aussi appelées *harmoniques sphériques*. Leur théorie peut être construite sur la base de la théorie des polynômes orthogonaux classiques.

Cherchons les solutions particulières de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ par la méthode de séparation des variables en coordonnées sphériques (r, θ, φ). On sait que dans ce cas

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u,$$

où

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Nous allons chercher les solutions particulières de l'équation de Laplace sous la forme $u = R(r) Y(\theta, \varphi)$. Procédant de la façon habituelle de la méthode de séparation des variables, on obtient

$$\frac{r^2 \Delta_r R}{R} = -\frac{\Delta_{\theta, \varphi} Y(\theta, \varphi)}{Y(\theta, \varphi)} = \lambda,$$

où λ est une constante. Pour définir les fonctions $R(r)$ et $Y(\theta, \varphi)$ on se sert des équations

$$(r^2 R')' = \lambda R, \tag{1}$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y + \lambda Y = 0. \tag{2}$$

Appliquons à l'équation (2) la même méthode de séparation des variables en posant

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi),$$

ce qui nous donne

$$\frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)}{\Theta(\theta)} + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu,$$

où μ est une constante. Ainsi donc, les fonctions $\Phi(\varphi)$ et $\Theta(\theta)$ auront pour équations

$$\Phi'' + \mu \Phi = 0, \tag{3}$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (\lambda \sin^2 \theta - \mu) \Theta = 0. \tag{4}$$

La condition d'uniformité de la fonction $\Phi(\varphi)$ entraîne celle de périodicité de la fonction $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Sous cette condition l'équation (3) ne sera résoluble que si $\mu = m^2$, où m est un nombre en-

tier. On a deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3):

$$\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi},$$
$$\Phi_{-m}(\varphi) = C_{-m} e^{-im\varphi}$$

(C_m est la constante de normalisation).

Les fonctions $\Phi_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}$ ($m = 0, \pm 1, \ldots$) vérifient les conditions d'orthogonalité de la forme

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi)\, \Phi_{m'}(\varphi)\, d\varphi = A_m \delta_{mm'},$$

où

$$A_m = 2\pi |C_m|^2, \quad \delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & m' = m; \\ 0, & m' \neq m. \end{cases}$$

Il est commode de choisir $A_m = 1$, ce qui donne $C_m = 1/\sqrt{2\pi}$, c.-à-d. que

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cherchons maintenant la solution de l'équation (4) pour $\mu = m^2$. Si l'on pose $\cos\theta = x$, l'équation (4) sera réduite à une équation généralisée du type hypergéométrique

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)\Theta = 0, \tag{5}$$

pour laquelle $\sigma(x) = 1 - x^2$, $\tilde{\tau}(x) = -2x$, $\tilde{\sigma}(x) = \lambda(1 - x^2) - m^2$ (voir § 10, 2). Lors de réduction de l'équation (5) à l'équation du type hypergéométrique, deux valeurs de k sont possibles, à savoir: $k = \lambda$ et $k = \lambda - m^2$. Dans le premier cas $\pi_1(x) = \pm m$, dans le deuxième $\pi_1(x) = \pm mx$. Nous choisirons, de toutes les formes possibles de la fonction $\tau(x) = \tilde{\tau}(x) - 2\pi_1(x)$, celle qui vérifie les conditions imposées à la fonction $\tau(x)$ pour les polynômes orthogonaux classiques, c.-à-d. $\tau(-1) > 0$, $\tau(+1) < 0$ (voir § 6, 1). D'où l'on tire, pour $m \geqslant 0$,

$$\pi_1(x) = mx, \quad \tau(x) = -2x(m + 1),$$
$$\varphi(x) = (1 - x^2)^{-m/2}, \quad \rho(x) = (1 - x^2)^m,$$
$$\Theta(x) = \frac{1}{\varphi(x)} y = (1 - x^2)^{m/2} y,$$

où la fonction $y(x)$ satisfait à l'équation du type hypergéométrique

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)^{m+1} y'\right] + \left[\lambda - m(m + 1)\right](1 - x^2)^m y = 0. \tag{6}$$

Comme on l'a montré dans le § 14, pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$ l'équation (6) n'admet des solutions non triviales vérifiant la condition de continuité de la fonction $y(x, \lambda)\sqrt{\rho(x)}$ que si

$$\lambda - m(m+1) = \lambda_n = n(n+2m+1),$$

la fonction $y(x, \lambda_n)$ coïncidant, à un facteur près, avec le polynôme de Jacobi $P_n^{(m,m)}(x)$. Si l'on pose $n = l - m$, où l est un nombre entier tel que $l \geqslant m$, on a pour $m \geqslant 0$

$$\lambda = l(l+1),$$

$$\Theta(x) = \Theta_{lm}(x) = C_{lm}(1-x^2)^{m/2} P_{l-m}^{(m,m)}(x).$$

C_{lm} est ici une constante de normalisation. De toute évidence, les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ vérifient les conditions d'orthogonalité de la forme

$$\int_{-1}^{1} \Theta_{lm}(x)\,\Theta_{l'm}(x)\,dx = A_{lm}\delta_{ll'},$$

où

$$A_{lm} = C_{lm}^2 \int_{-1}^{1} [P_{l-m}^{(m,m)}(x)]^2 (1-x^2)^m\,dx.$$

Il est commode de choisir*) $A_{lm} = 1$, ce qui donne

$$C_{lm} = \frac{1}{2^m l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}(l-m)!\,(l+m)!}\,.$$

Citons quelques écritures différentes de la fonction $\Theta_{lm}(x)$ pour $m \geqslant 0$, qui découlent des propriétés des polynômes de Jacobi. Conformément au théorème 1 du § 7,

$$P_{l-m}^{(m,m)}(x) = b_{lm}\frac{d^m P_l(x)}{dx^m},$$

où $P_l(x)$ est un polynôme de Legendre. Il est facile de trouver la constante b_{lm} à l'aide des formules de Rodrigues (14) et (16) du § 7 pour $P_{l-m}^{(m,m)}(x)$ et $\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$:

$$b_{lm} = \frac{2^m l!}{(l+m)!}\,.$$

Ainsi donc, pour $m \geqslant 0$

$$\Theta_{lm}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(x),$$

*) Le signe de la constante C_{lm} ne peut être choisi de façon unique. Nous adoptons la normalisation proposée par H. Bethe, E. Salpeter, « Quantum mechanics of one- and two-electron atoms», Berlin, a. o. Springer-Verl., 1957.

où

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

porte le nom de *fonction de Legendre associée.*

On arrive à mettre les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ sous forme explicite en utilisant les formules de Rodrigues pour $P_l(x)$ et $\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$:

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l; \quad (7)$$

$$\Theta_{lm}(x) = \frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}(1-x^2)^{-m/2}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(1-x^2)^l. \quad (8)$$

Voyons ce que deviennent les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ quand $m < 0$. Utilisant les relations (7) et (8), on obtient

$$\Theta_{l,-m}(x) = (-1)^m \Theta_{lm}(x). \quad (9)$$

On voit donc que pour $m < 0$ les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ restent toujours solutions de l'équation (5). Ainsi, pour $\lambda = l(l+1)$ l'équation (2) admet les solutions univoques et continues

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}\Theta_{lm}(\cos\theta) \quad (-l \leqslant m \leqslant l). \quad (10)$$

Les fonctions $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ sont appelées *fonctions sphériques d'ordre* l.

Citons les expressions explicites des fonctions sphériques pour quelques cas élémentaires:

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta), \quad (11)$$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}. \quad (12)$$

Il est facile de vérifier que les fonctions $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ satisfont aux relations d'orthogonalité suivantes:

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \quad (13)$$

Intégrant (13) sur l'angle solide

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Il est évident aussi que

$$Y^*_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta_{lm}(\cos\theta)\,\Phi_{-m}(\varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta, \varphi). \quad (14)$$

Ainsi, nous avons obtenu une forme explicite de la fonction $Y(\theta, \varphi)$ qui définit la relation entre les angles et la solution parti-

7—01174

culière $u = R(r) Y(\theta, \varphi)$ de l'équation de Laplace. Pour définir la fonction $R(r)$, déduisons conformément à (1) l'équation d'Euler:

$$r^2R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0,$$

dont la solution générale est de la forme

$$R(r) = C_1 r^l + C_2 r^{-l-1}$$

(C_1 et C_2 sont des constantes).

Par conséquent, l'équation de Laplace a pour solutions particulières les fonctions $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ et $\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi)$, dont les premières s'emploient pour résoudre les problèmes aux limites intérieurs, et les deuxièmes, extérieurs. Ces fonctions sont connues sous l'appellation de *fonctions sphériques volumiques*.

Nota. Dans le livre [4] est envisagée une autre méthode d'étude des fonctions sphériques, basée sur les représentations d'un groupe de rotations. Cette méthode est utilisée lors de l'étude de la théorie générale du moment de la quantité de mouvement en mécanique quantique (voir aussi [14, 3]).

2. Propriétés des fonctions sphériques. Mettons en évidence quelques propriétés des fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

1) De la relation de récurrence pour les polynômes de Jacobi et de la relation existant entre les fonctions $\Theta_{lm}(x)$ et les polynômes de Jacobi $P_{l-m}^{(m,m)}(x)$, on tire facilement la *relation de récurrence* pour la fonction $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$\cos\theta \cdot Y_{lm} = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2-1}}\, Y_{l+1,m} + \sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}\, Y_{l-1,m}.$$

Cette formule garde sa forme quand $m < 0$; on s'en assure sans peine à l'aide de (14).

2) Dérivant la relation (7), on obtient la formule de dérivation

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx} = -\frac{mx}{1-x^2}\Theta_{lm} + \sqrt{\frac{l(l+1)-m(m+1)}{1-x^2}}\,\Theta_{l,m+1}.$$

Remplaçant m par $-m$ et utilisant (9), on peut écrire une autre formule de dérivation:

$$\frac{d\Theta_{lm}}{dx} = \frac{mx}{1-x^2}\Theta_{lm} - \sqrt{\frac{l(l+1)-m(m-1)}{1-x^2}}\,\Theta_{l,m-1}.$$

En éliminant entre les formules de dérivation la fonction $\frac{d\Theta_{lm}}{dx}$, on aboutit à la relation de récurrence pour la fonction $\Theta_{lm}(x)$ par rapport à l'indice m:

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}\Theta_{lm} = [\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,\Theta_{l,m+1} - \\ - \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\Theta_{l,m-1}].$$

En se servant de (10) on peut obtenir les **formules de dérivation pour les fonctions sphériques.** Puisque

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{d\Theta_{lm}(x)}{dx}\bigg|_{x=\cos\theta},$$

il est légitime de récrire les formules de dérivation pour $\Theta_{lm}(x)$ sous la forme

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} + m\operatorname{cotg}\theta Y_{lm}\right) = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_{l,\,m\pm1}. \quad (15)$$

Dans ces formules on suppose que $Y_{lm}(\theta,\varphi) = 0$ quand $m = \pm(l+1)$.

De la forme explicite des fonctions sphériques découle également la *formule de dérivation* suivante:

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = imY_{lm}(\theta,\varphi). \quad (16)$$

3) Ecrivons la *représentation intégrale* de la fonction $Y_{lm}(\theta,\varphi)$. A cet effet, mettons dans l'expression de $\Theta_{lm}(x)$ la fonction $\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l$ sous la forme de l'intégrale de Cauchy:

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l = \frac{(l+m)!}{2\pi i}\int_C \frac{(1-z^2)^l}{(z-x)^{l+m+1}}\,dz$$

(C étant un contour entourant le point $z = x$). En opérant de la même façon qu'à la déduction de la représentation intégrale (30) du § 7 pour les polynômes de Legendre, mettons l'intégrale sous une forme plus simple:

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l = \frac{(-2)^l(l+m)!}{2\pi}(1-x^2)^{-m/2}\int_0^{2\pi} e^{-imu}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\sin u\right)^l du.$$

Substituant l'expression obtenue dans (7) et faisant intervenir (10), on obtient la représentation intégrale pour $Y_{lm}(\theta,\varphi)$:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = B_{lm}\int_0^{2\pi} e^{-im(u-\varphi)}(\cos\theta + i\sin\theta\sin u)^l du = B_{lm}\int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{-imu}[\cos\theta + i\sin\theta\sin(u+\varphi)]^l du,$$

où

$$B_{lm} = \frac{1}{4\pi l!}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}(l-m)!\,(l+m)!}.$$

Puisque l'intégrale d'une fonction périodique le long d'un segment de longueur égale à la période ne dépend pas de la position occupée par ce segment, on a

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = B_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-imu} [\cos\theta + i \sin\theta \sin(u+\varphi)]^l \, du. \qquad (17)$$

3. Relation entre les polynômes harmoniques homogènes et les fonctions sphériques. En résolvant l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ en coordonnées sphériques, nous avons trouvé les solutions particulières de cette équation bornées pour $r \to 0$:

$$u_{lm}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

A l'aide de la représentation intégrale (17), les fonctions $u_{lm}(r, \theta, \varphi)$ peuvent s'écrire en coordonnées cartésiennes:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta.$$

On a

$$u_{lm}(r, \theta, \varphi) = B_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-imu} [r\cos\theta + ir \sin\theta \sin(u+\varphi)]^l \, du =$$

$$= B_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-imu} (z + ix \sin u + iy \cos u)^l \, du.$$

On voit de là que *la fonction $u_{lm}(r, \theta, \varphi)$ est un polynôme homogène de degré l par rapport aux variables x, y, z.*

Rappelons qu'on entend par *polynôme homogène de degré l* une expression de la forme

$$u_l(x, y, z) = \sum_{l_1, l_2, l_3} C_{l_1 l_2 l_3} x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3},$$

où la sommation s'étend à tous les indices non négatifs $l_1 \geqslant 0$, $l_2 \geqslant 0$, $l_3 \geqslant 0$ dont la somme est $l_1 + l_2 + l_3 = l$. A ce titre, l'expression $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ est un polynôme homogène.

Calculons le nombre de polynômes homogènes linéairement indépendants de degré l. Pour ce faire, il suffit de prendre une à une toutes les combinaisons possibles des valeurs l_1 et l_2, car, pour un l fixé, la valeur de l_3 est définie de façon univoque: $l_3 = l - l_1 - l_2$. Si c'est l_1 qui est fixé, la valeur de l_2 varie de $l_2 = 0$ à $l_2 = l - l_1$, en prenant $l - l_1 + 1$ valeurs. De ce fait, le nombre total des polynômes homogènes linéairement indépendants de degré l est

$$N_l = \sum_{l_1=0}^{l} (l - l_1 + 1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Un polynôme homogène vérifiant l'équation de Laplace est dit polynôme harmonique homogène. L'expression $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ donne l'exemple d'un polynôme harmonique homogène.

En combinant les polynômes homogènes r^2 et $r^{l-2n} Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi)$ on arrive à composer des polynômes homogènes de degré l

$$u_{lmn}(x, y, z) = (r^2)^n r^{l-2n} Y_{l-2n,\,m}(\theta, \varphi) = r^l Y_{l-2n,\,m}(\theta, \varphi).$$

Dans cette expression les indices m et n prennent des valeurs entières vérifiant les inégalités

$$0 \leqslant 2n \leqslant l, \quad -(l-2n) \leqslant m \leqslant l-2n.$$

En vertu de l'indépendance linéaire des fonctions sphériques $Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi)$ résultant de leur orthogonalité, les polynômes homogènes $u_{lmn}(x, y, z)$ seront linéairement indépendants. Pour une valeur fixe de $l-2n$ le nombre de valeurs possibles de m est égal à $2(l-2n)+1$. Aussi, le nombre total des polynômes homogènes considérés est-il égal à

$$\sum_n [2(l-2n)+1] = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Le nombre des polynômes homogènes que nous avons formés étant égal au nombre total des polynômes homogènes linéairement indépendants de degré l, un polynôme homogène arbitraire de degré l peut être représenté sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes homogènes $r^l Y_{l-2n,m}(\theta, \varphi)$, de sorte que

$$u_l(x, y, z) = r^l \sum_{m,\,n} C_{mn} Y_{l-2n,\,m}(\theta, \varphi). \tag{18}$$

On a obtenu le développement d'un polynôme homogène arbitraire suivant les fonctions sphériques. On montre sans difficulté, à l'aide du développement (18), que *tout polynôme harmonique homogène arbitraire de degré l est une combinaison linéaire des polynômes harmoniques homogènes* $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

En effet, soit $u_l(x, y, z)$ un polynôme harmonique homogène, de sorte que $\Delta u_l = 0$. Alors, par application de l'opérateur de Laplace $\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}$ au développement (18), on aura

$$\Delta u_l = r^{l-2} \sum_{m,\,n} [l(l+1) - (l-2n)(l-2n+1)] C_{mn} Y_{l-2n,\,m}(\theta, \varphi) =$$
$$= r^{l-2} \sum_{m,\,n} 2n(2l-2n+1) C_{mn} Y_{l-2n,\,m}(\theta, \varphi) = 0.$$

En vertu de l'indépendance linéaire des fonctions sphériques $Y_{l-2n,\,m}(\theta, \varphi)$ on obtient l'égalité

$$2n(2l-2n+1)C_{mn} = 0,$$

c.-à-d. que $C_{mn} = 0$ quand $n > 0$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Fonctions sphériques généralisées. Lorsque le système de coordonnées subit une rotation, un polynôme homogène se transforme en un polynôme homogène de même degré. D'autre part, une telle rotation conserve l'opérateur de Laplace, c.-à-d. $\Delta_{xyz} = \Delta_{x'y'z'}$. C'est pourquoi, en faisant tourner le système de coordonnées, on transforme n'importe quels polynômes harmoniques homogènes en des polynômes harmoniques homogènes de même degré. Il en découle

$$u_{lm}(x, y, z) = \sum_{m'} D^l_{mm'} u_{lm'}(x', y', z'),$$

et, par conséquent,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D^l_{mm'} Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \tag{19}$$

Ainsi donc, *les combinaisons linéaires de fonctions* $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ *avec un* l *donné forment un espace des fonctions à* $(2l+1)$ *dimensions invariant par rotations.*

Les coefficients $D^l_{mm'}$ dépendront évidemment des paramètres définissant la rotation du système de coordonnées. Toute rotation du système de coordonnées peut être réalisée en trois étapes: a) rotation d'angle α autour de l'axe des z; b) rotation d'angle β autour de la nouvelle direction de l'axe des x; c) rotation d'angle γ autour de la nouvelle direction de l'axe des z. Les angles α, β et γ portent le nom d'*angles d'Euler*. On a donc

$$D^l_{mm'} = D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Les angles d'Euler définissent univoquement une rotation arbitraire dans le cas où ils varient dans les limites suivantes: $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $0 \leqslant \beta < \pi$, $0 \leqslant \gamma < 2\pi$. La rotation en sens inverse sera définie alors par les angles $\alpha_1 = \pi - \gamma$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \pi - \alpha$, de sorte que

$$Y_{lm'}(\theta', \varphi') = \sum_{m} D^l_{m'm}(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha) Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{20}$$

Donc, la matrice $\{D^l_{mm'}(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)\}$ est l'inverse de la matrice $\{D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)\}$.

Les fonctions $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$ ont reçu l'appellation des *fonctions sphériques généralisées*, car, pour un certain nombre de cas particuliers, elles coïncident avec les fonctions sphériques ordinaires. (Elles sont appelées aussi *fonctions de Wigner*.) Les fonctions sphériques généralisées sont largement utilisées en mécanique quantique *).

Déduisons quelques propriétés fondamentales des fonctions sphériques généralisées et trouvons leur expression explicite au moyen des paramètres α, β, γ.

---

*) Voir par exemple le livre de A. Davydov « Mécanique quantique », « Naouka », 1973.

Comme l'élément d'angle solide ne change pas à la rotation du système de coordonnées, c.-à-d. $d\Omega = d\Omega'$, il découle des conditions d'orthogonalité

$$\int Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{lm_1}(\theta, \varphi)\, d\Omega = \delta_{mm_1},$$

$$\int Y_{lm'}(\theta', \varphi') Y^*_{lm'_1}(\theta', \varphi')\, d\Omega' = \delta_{m'm'_1}$$

la relation

$$\sum_{m'} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)\,[D^l_{m_1m'}(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \delta_{mm_1},$$

ce qui signifie que la matrice $\{T_{mm'}\} = \{[D^l_{m'm}]^*\}$ est l'inverse de la matrice $D^l_{mm'}$. Donc, en accord avec ce qui précède,

$$D^l_{mm'}(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha) = [D^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)]^*. \tag{21}$$

De la propriété (14) des fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ on obtient sans difficulté une autre propriété élémentaire des fonctions sphériques généralisées:

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m-m'}[D^l_{-m,\,-m'}(\alpha, \beta, \gamma)]^*. \tag{22}$$

Passons à la recherche des expressions explicites des fonctions sphériques généralisées $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$. Supposons qu'on ait effectué deux rotations successives de paramètres $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, équivalentes à une seule rotation de paramètres α, β, γ, et ceci de telle façon qu'à la suite de la première rotation les coordonnées sphériques (θ, φ) d'un vecteur fixé se transforment en coordonnées sphériques (θ_1, φ_1) et à la suite de la deuxième rotation les coordonnées (θ_1, φ_1) passent à (θ', φ'). Alors

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1),$$

$$Y_{lm_1}(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{m'} D^l_{m_1m'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

D'autre part,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)\, Y_{lm'}(\theta', \varphi').$$

Confrontant ces développements et en vertu de l'indépendance linéaire des fonctions sphériques, on trouve

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1} D^l_{mm_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, D^l_{m_1m'}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

Une relation analogue est observée en cas de réalisation de plusieurs rotations successives du système de coordonnées. De la définition des angles d'Euler et du dernier raisonnement il découle que pour calculer les fonctions sphériques généralisées $D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$, il suffit

de rechercher leurs expressions pour les seuls cas où les rotations s'opèrent autour de l'axe des z et autour de l'axe des x. Désignons par $C^l_{mm'}(\alpha)$ et $P^l_{mm'}(\beta)$ les fonctions sphériques généralisées correspondant à la rotation d'angle α autour de l'axe des z et d'angle β autour de l'axe des x. On a alors

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m_1 m_2} C^l_{mm_1}(\alpha) P^l_{m_1 m_2}(\beta) C^l_{m_2 m'}(\gamma).$$

Cherchons maintenant des expressions explicites des fonctions $C^l_{mm'}(\alpha)$. Lors de la rotation d'angle α autour de l'axe des z les coordonnées sphériques (θ, φ) d'un vecteur fixé se transforment en coordonnées $\theta' = \theta$, $\varphi' = \varphi - \alpha$. Aussi

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta', \varphi' + \alpha) = e^{im\alpha} Y_{lm}(\theta', \varphi').$$

D'autre part,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} C^l_{mm'}(\alpha) Y_{lm'}(\theta', \varphi'),$$

d'où

$$C^l_{mm'}(\alpha) = e^{im\alpha} \delta_{mm'}$$

et, par conséquent,

$$D^l_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i(m\alpha + m'\gamma)} P^l_{mm'}(\beta). \tag{23}$$

Cherchons maintenant les fonctions sphériques généralisées $P^l_{mm'}(\beta)$ correspondant à la rotation du système de coordonnées de l'angle β autour de l'axe des x. Dans ce cas

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{m'} P^l_{mm'}(\beta) Y_{lm'}(\theta', \varphi'). \tag{24}$$

Les nouvelles coordonnées (x', y', z') sont liées aux anciennes (x, y, z) par les relations

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y' \cos\beta - z' \sin\beta, \\ z &= y' \sin\beta + z' \cos\beta. \end{aligned}$$

Passant aux coordonnées sphériques, on trouve la relation entre (θ, φ) et (θ', φ') :

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta\cos\varphi &= \sin\theta'\cos\varphi', \\ \sin\theta\sin\varphi &= \sin\theta'\sin\varphi'\cos\beta - \cos\theta'\sin\beta, \\ \cos\theta &= \sin\theta'\sin\varphi'\sin\beta + \cos\theta'\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Pour déterminer les fonctions $P^l_{mm'}(\beta)$, cherchons les relations différentielles entre ces fonctions. Comme dans le second membre de (24) la dérivation est la plus facile par rapport à β et à φ', nous allons

considérer cette relation pour une valeur fixe de θ', les variables θ et φ étant considérées comme fonctions des variables β et φ'. On a donc

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \beta} = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta},$$
$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi'} = \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'}.$$

Calculons les dérivées $\frac{\partial \theta}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi'}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'}$ au moyen des relations (25). Il vient

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = -\sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = -\operatorname{cotg} \theta \cos \varphi,$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi'} = -\sin \beta \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} = \sin \beta \operatorname{cotg} \theta \sin \varphi + \cos \beta.$$

D'où

$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \beta} = -\sin \varphi \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - im \operatorname{cotg} \theta \cos \varphi Y_{lm}(\theta, \varphi),$$
$$\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi'} = -\sin \beta \left[\cos \varphi \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - \right.$$
$$\left. - im \operatorname{cotg} \theta \sin \varphi Y_{lm}(\theta, \varphi)\right] + im \cos \beta Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Pour calculer la dérivée $\frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta}$ nous allons utiliser les formules de dérivation (15). Comme nous avons dans (15) les quantités $e^{\pm i\varphi} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}$ et dans les expressions de $\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \beta}$ et de $\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi'}$ les quantités $\sin \varphi \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}$ et $\cos \varphi \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}$, nous devrons, pour pouvoir nous servir des formules (15), former préalablement les combinaisons linéaires convenables à partir des quantités $\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi'}$. On a

$$i \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \beta} \pm \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi'} =$$
$$= e^{\pm i\varphi} \left[\mp \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + m \operatorname{cotg} \theta Y_{lm}\right] \pm im \operatorname{cotg} \beta Y_{lm} =$$
$$= \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\, Y_{l, m\pm 1}(\theta, \varphi) \pm im \operatorname{cotg} \beta Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Utilisant le développement (24) pour les quantités $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ et $Y_{l, m\pm 1}(\theta, \varphi)$ et égalant dans les deux membres de l'égalité les coefficients de $Y_{lm'}(\theta', \varphi')$, on se trouve en présence des relations différentielles cherchées pour la fonc-

tion $P^l_{mm'}(\beta)$:

$$\frac{dP^l_{mm'}}{d\beta} \pm \frac{m' - m\cos\beta}{\sin\beta} P^l_{mm'} = -i\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\, P^l_{m\pm 1,\, m'}. \tag{26}$$

On doit poser ici $P^l_{\pm(l+1),\, m'}(\beta) = 0$. A l'aide des relations (26) et de la condition $P^l_{mm'}(0) = \delta_{mm'}$ résultant de (24) pour $\beta = 0$, on arrive à définir de manière univoque toutes les fonctions $P^l_{mm'}(\beta)$.

Ecrivons la relation (26) sous une forme plus compacte. A cette effet, multiplions-la par

$$\exp\left(\pm\int \frac{m' - m\cos\beta}{\sin\beta}\, d\beta\right) = (1-\cos\beta)^{\pm\frac{m'-m}{2}}(1+\cos\beta)^{\mp\frac{m'+m}{2}}.$$

Il en résulte

$$\frac{d}{d\beta}\left[(1-\cos\beta)^{\pm\frac{m'-m}{2}}(1+\cos\beta)^{\mp\frac{m'+m}{2}} P^l_{mm'}(\beta)\right] =$$

$$= -i\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,(1-\cos\beta)^{\pm\frac{m'-m}{2}} \times$$

$$\times (1+\cos\beta)^{\mp\frac{m'+m}{2}} P^l_{m\pm 1,\, m'}(\beta). \tag{27}$$

Prenant les signes supérieurs et admettant que $m = l$, on obtient

$$(1-\cos\beta)^{\frac{m'-l}{2}}(1+\cos\beta)^{-\frac{m'+l}{2}} P^l_{lm'}(\beta) = \text{const}.$$

D'où

$$P^l_{lm'}(\beta) = C_{lm'}(1-\cos\beta)^{\frac{l-m'}{2}}(1+\cos\beta)^{\frac{l+m'}{2}}$$

($C_{lm'}$ est une constante). Pour $m < l$, les fonctions $P^l_{mm'}(\beta)$ peuvent être exprimées de façon récurrente au moyen de $P^l_{lm'}(\beta)$ en prenant dans (27) les signes inférieurs. Effectuant le changement de variables

$$\mu = \cos\beta,\quad v_{mm'}(\mu) = (1-\mu)^{\frac{m-m'}{2}}(1+\mu)^{\frac{m+m'}{2}} P^l_{mm'}(\beta),$$

on obtient

$$v_{m-1,\, m'} = -\frac{i}{\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}}\frac{dv_{mm'}}{d\mu},$$

d'où

$$v_{mm'} = (-i)^{l-m}\prod_{s=m+1}^{l}\frac{1}{\sqrt{l(l+1) - s(s-1)}}\frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}} v_{lm'},$$

c.-à-d. que

$$P^l_{mm'}(\beta) = C_{lm'} \frac{(1-\mu)^{\frac{m'-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{m'+m}{2}}}{(i)^{l-m} \prod\limits_{s=m+1}^{l} \sqrt{l(l+1)-s(s-1)}} \times$$

$$\times \frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}} [(1-\mu)^{l-m'} (1+\mu)^{l+m'}]. \quad (28)$$

Pour déterminer la constante $C_{lm'}$, recourons à l'égalité $P^l_{m'm'}(0) = 1$. Dérivant dans (28) d'après la formule de Leibniz, on aura

$$P^l_{m'm'}(0) = C_{lm'} \frac{2^{-m'} 2^{l+m'} (-1)^{l-m'} (l-m')!}{(i)^{l-m'} \prod\limits_{s=m'+1}^{l} \sqrt{l(l+1)-s(s-1)}} = 1,$$

ce qui donne

$$C_{lm'} = \frac{(-i)^{l-m'} \prod\limits_{s=m'+1}^{l} \sqrt{l(l+1)-s(s-1)}}{2^l (l-m')!}.$$

Puisque

$$\prod_{s=m+1}^{l} [l(l+1)-s(s-1)] = \prod_{s=m+1}^{l} (l+s)(l-s+1) = \frac{(2l)!\,(l-m)!}{(l+m)!},$$

on a en définitive:

$$P^l_{mm'}(\beta) = \frac{(-1)^{l-m'} (i)^{m-m'}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}} (1-\mu)^{\frac{m'-m}{2}} \times$$

$$\times (1+\mu)^{-\frac{m'+m}{2}} \frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}} [(1-\mu)^{l-m'} (1+\mu)^{l+m'}]. \quad (29)$$

En particulier, la comparaison entre les formules (29) pour $m' = 0$ et (8) donne

$$P^l_{m0}(\beta) = (-i)^m \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \Theta_{lm}(\mu),$$

d'où

$$D^l_{m0}(\alpha, \beta, \gamma) = (-i)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\beta, \alpha),$$

$$D^l_{00}(\alpha, \beta, \gamma) = P_l(\cos\beta).$$

Utilisant (21), on arrive à obtenir une autre relation analogue:

$$D^l_{0m}(\alpha, \beta, \gamma) = (-i)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\beta, \gamma). \quad (30)$$

Les fonctions $P^l_{mm'}(\beta)$ peuvent s'écrire sous une forme différente si l'on fait intervenir les relations de symétrie qui découlent de (29), (21), (22) et (23):

$$P^l_{mm'} = P^l_{m'm}, \quad P^l_{mm'} = P^l_{-m,\,-m'}. \tag{31}$$

A l'aide des relations (31), on peut toujours faire en sorte que les inégalités $m - m' \geqslant 0$, $m + m' \geqslant 0$ soient vérifiées, auquel cas il est aisé d'exprimer la fonction $P^l_{mm'}(\beta)$ à l'aide des polynômes de Jacobi:

$$P^l_{mm'}(\beta) = \frac{(-i)^{m-m'}}{2^m} \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+m')!\,(l-m')!}} \times$$
$$\times (1-\mu)^{\frac{m-m'}{2}} (1+\mu)^{\frac{m+m'}{2}} P^{(m-m',\,m+m')}_{l-m}(\mu),$$

où $\mu = \cos\beta$.

5. Théorème d'addition. Déduisons une relation utile pour les fonctions sphériques, connue sous l'appellation de théorème d'addition. Pour cela, posons dans (20) $m' = 0$, $\gamma = 0$ et utilisons les formules (11) et (30):

$$P_l(\cos\theta') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m (-i)^m Y_{lm}(\beta, \pi-\alpha)\, Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{32}$$

La relation (32) admet une interprétation géométrique simple.

Considérons deux vecteurs arbitraires $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ dont les directions sont caractérisées par les coordonnées sphériques (θ_1, φ_1) et (θ_2, φ_2). Supposons que l'angle compris entre ces vecteurs est égal à ω. Posons dans (32) $\theta = \theta_1$, $\varphi = \varphi_1$ et prenons pour nouvelle direction de l'axe des z la direction du vecteur $\boldsymbol{r}_2$. Puisque le nouveau système de coordonnées a été obtenu en faisant tourner le système ancien d'angles d'Euler $(\alpha, \beta, 0)$, on constate facilement que $\beta = \theta_2$, $\alpha = \varphi_2 + \pi/2$. L'angle ω entre les vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ coïncide évidemment avec θ'. La formule (32) devient donc

$$P_l(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1)\, Y^*_{lm}(\theta_2, \varphi_2). \tag{33}$$

La relation (33) est le *théorème d'addition pour les fonctions sphériques.* Ce théorème connaît de nombreuses applications, par exemple en théorie des spectres atomiques.

A titre d'exemple d'application du théorème d'addition, proposons-nous de résoudre le *premier problème aux limites intérieur pour l'équation de Laplace dans un domaine en forme de boule*:

$$\Delta u = 0, \quad u(r, \theta, \varphi)\big|_{r=a} = f(\theta, \varphi).$$

Procédons à la recherche de la solution de ce problème par la méthode de séparation des variables sous la forme d'une série de Fourier suivant les

fonctions $r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l, m} C_{lm} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \tag{34}$$

Ici

$$C_{lm} = \int f(\theta', \varphi') Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\, d\Omega'.$$

Portons dans (34) l'expression de C_{lm}, intervertissons la sommation et l'intégration, puis sommons sur m à l'aide du théorème d'addition:

$$u(r, \theta, \varphi) = \int d\Omega' f(\theta', \varphi') \left[\sum_{l, m} \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{lm}(\theta', \varphi')\right] =$$

$$= \int d\Omega' f(\theta', \varphi') \left[\sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu)\right].$$

Ici μ est le cosinus de l'angle entre les directions (θ, φ) et (θ', φ') :

$$\mu = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Pour effectuer la sommation sur l, utilisons la fonction génératrice pour les polynômes de Legendre :

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t\mu + t^2}}.$$

Puisque

$$\sum_l (2l+1) t^l P_l(\mu) = 2\sqrt{t} \sum_l \left(l + \frac{1}{2}\right) t^{l - 1/2} P_l(\mu) =$$

$$= 2\sqrt{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1 - 2t\mu + t^2}}\right) = \frac{1 - t^2}{(1 - 2t\mu + t^2)^{3/2}},$$

on a

$$\sum_l (2l+1) \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\mu) = \frac{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{\left[1 - 2\mu \frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{3/2}}$$

et, par conséquent,

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' f(\theta', \varphi') \frac{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{\left[1 - 2\mu \frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

§ 16. Quelques problèmes de mécanique quantique

Examinons quelques problèmes caractéristiques de la mécanique quantique dans lesquels on rencontre des polynômes orthogonaux classiques.

1. Résolution de l'équation de Schrödinger pour un champ à symétrie centrale. Le problème fondamental de la mécanique quantique de l'atome est le problème du mouvement de l'électron dans le champ d'attraction central. Ceci tient à ce que la définition du mouvement des électrons de l'atome, définition faite au moyen de l'approximation du champ central, constitue la base pour les calculs des différentes propriétés de structures atomiques *). Une pareille définition donne la possibilité d'avoir une idée assez nette des particularités de comportement des atomes, ainsi que de déterminer leurs états énergétiques, sans qu'il soit nécessaire d'aborder à cet effet le problème très difficile de mécanique quantique pour des corps multiples.

Pour rechercher la fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$ d'une particule se mouvant dans un champ à symétrie centrale $U(r)$, il est nécessaire de résoudre l'équation de Schrödinger (voir § 14, 1)

$$\Delta\psi+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-U(r)]\,\psi=0. \qquad (1)$$

Cherchons les solutions particulières de l'équation (1) par la méthode de séparation des variables en coordonnées sphériques, en posant

$$\psi(\boldsymbol{r}) = F(r)\,Y(\theta,\ \varphi).$$

Par les mêmes opérations qu'à la résolution de l'équation de Laplace (voir § 15), nous obtiendrons pour les fonctions $F(r)$ et $Y(\theta,\ \varphi)$ les équations

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y+\lambda Y=0, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-U(r))-\frac{\lambda}{r^2}\right]F(r)=0. \qquad (3)$$

L'équation (2) n'admet de solutions vérifiant les conditions de continuité pour $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ que si $\lambda=l(l+1)$; dans ce cas $Y(\theta,\ \varphi)=Y_{lm}(\theta,\ \varphi)$ est une fonction sphérique.

Puisque

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rF),$$

l'équation (3) se réduit par substitution $R(r)=rF(r)$ à une équation dont la forme rappelle l'équation de Schrödinger à une dimension

$$R''+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-U(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0. \qquad (4)$$

Pour les états du spectre discret, la fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$ doit satisfaire à la condition de normalisation

$$\int|\psi(\boldsymbol{r})|^2r^2\,dr\,d\Omega=1.$$

*) Voir D. R. Hartree. The calculation of atomic structures. New York, Wiley; London, Chapman and Hall, 1957.

Comme on a 107

$$\int |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = 1,$$

la condition de normalisation pour la fonction $R(r)$ devient

$$\int_0^\infty R^2(r)\, dr = 1. \tag{5}$$

2. Atome hydrogénoïde. Il n'existe qu'un seul atome pour lequel l'équation de Schrödinger admette une solution exacte : c'est l'atome le plus élémentaire, c.-à-d. l'atome d'hydrogène. Or, cela ne diminue point mais augmente l'importance de la solution exacte du problème en question pour l'atome d'hydrogène, car les solutions analytiques obtenues sous forme explicite sont utiles bien souvent comme un point de départ pour les calculs approchés qui se rapportent à des systèmes de mécanique quantique plus compliqués.

Pour la description de l'atome d'hydrogène en termes de mécanique quantique, il convient de considérer le mouvement relatif de l'électron (masse m, charge $-e$) et du noyau (masse M, charge e). Nous résolvons un problème un peu plus général en supposant que la charge du noyau soit Ze. Ce problème est d'un intérêt physique évident, car les valeurs propres de l'énergie que l'on y trouve correspondent, à des effets relativistes près, aux niveaux d'énergie observés de l'atome d'hydrogène ($Z = 1$), de l'atome d'hélium simplement ionisé ($Z = 2$), etc. En outre, l'utilité du modèle d'atome hydrogénoïde est évidente pour l'étude des spectres des éléments alcalins et des spectres des rayons X des atomes à Z élevé.

Le problème proposé du mouvement de l'électron et du noyau se trouvant en interaction réciproque peut être facilement ramené au problème du mouvement d'un corps unique : d'une particule de masse réduite *)

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \approx m$$

dans le champ coulombien $U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$, c.-à-d. à la solution de l'équation de Schrödinger

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)\psi = 0.$$

Puisque l'énergie potentielle $U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ s'annule à l'infini, il résulte des considérations physiques que les états du spectre discret n'auront lieu que pour $E < 0$ (voir [7]).

*) Voir par exemple [7].

En passant aux coordonnées sphériques, on obtient pour la fonction radiale $R(r)$ l'équation

$$R'' + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0. \tag{6}$$

Dans cette équation, il est commode de passer à des variables sans dimension en prenant comme unités de longueur et d'énergie les quantités

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \quad E_0 = \frac{e^2}{a_0}.$$

L'équation (6) prend alors la forme suivante:

$$R'' + \left[2\left(E + \frac{Z}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0. \tag{7}$$

Les conditions selon lesquelles la fonction d'onde $\psi(\boldsymbol{r})$ doit être continue et de carré intégrable amènent à la condition de continuité de la fonction $\frac{1}{r} R(r)$ et à la condition de normalisation (5).

L'équation (7) est une équation généralisée du type hypergéométrique, pour laquelle (voir § 10, 2)

$$\sigma(r) = r, \; \tilde{\tau}(r) = 0, \quad \tilde{\sigma}(r) = 2Er^2 + 2Zr - l(l+1).$$

Lorsqu'on ramène l'équation (7) à l'équation du type hypergéométrique, deux valeurs de k sont possibles:

$$k_1 = 2Z + (2l+1)\sqrt{-2E} \text{ et } k_2 = 2Z - (2l+1)\sqrt{-2E}.$$

Dans le premier cas

$$\pi_1(r) = -\frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{-2E}\, r + l + \frac{1}{2}\right),$$

dans le second

$$\pi_1(r) = -\frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{-2E}\, r - l - \frac{1}{2}\right).$$

Cherchons parmi les formes possibles de la fonction

$$\tau(r) = \tilde{\tau}(r) - 2\pi_1(r)$$

celle qui puisse satisfaire aux conditions imposées à $\tau(r)$ pour les polynômes orthogonaux classiques, à savoir: $\tau(0) > 0$, $\tau'(r) < 0$ (voir § 6, 1). Cela entraîne

$$\pi_1(r) = \sqrt{-2E}\, r - l - 1,$$

$$\tau(r) = 2\left(l + 1 - \sqrt{-2E}\, r\right),$$

$$\varphi(r) = r^{-(l+1)} e^{\sqrt{-2E}\, r},$$

$$\lambda = k - \pi_1'(r) = 2\left[Z - (l+1)\sqrt{-2E}\right],$$

$$R(r) = \frac{1}{\varphi(r)} y(r) = r^{l+1} e^{-\sqrt{-2E}\, r} y(r),$$

où la fonction $y(r)$ satisfait à l'équation du type hypergéométrique

$$y'' + \frac{2(l+1-\sqrt{-2E}\,r)}{r} y' + \frac{2[Z-(l+1)\sqrt{-2E}]}{r} y = 0. \quad (8)$$

Par changement de variable $x = 2\sqrt{-2E}\,r$ (voir § 10, 3), l'équation (8) se réduit à la forme canonique

$$xy'' + [2(l+1) - x]\,y' + \lambda_1 y = 0, \quad (9)$$

où

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{-2E}} = \frac{Z}{\sqrt{-2E}} - l - 1.$$

L'équation (9) appartient au type examiné au § 14. Pour cette équation

$$\sigma(x) = x, \quad \tau(x) = 2(l+1) - x, \quad \rho(x) = x^{2l+1}e^{-x}.$$

Comme nous avons déjà montré au § 14, l'équation (9) admet des solutions $y(x)$ non triviales, pour lesquelles la fonction

$$\sqrt{\rho(x)}\,y(x) = x^{l+1/2}e^{-x/2}y(x)$$

est continue et de carré intégrable pour $0 \leqslant x < \infty$ dans le seul cas où

$$\lambda_1 = n_r \quad (n_r = 0,\ 1,\ \ldots),$$
$$y(x) = CL_{n_r}^{2l+1}(x). \quad (10)$$

Ici $L_n^\alpha(x)$ est un polynôme de Laguerre. L'indice inférieur r du nombre entier n_r tient à ce que, lors de la classification des états atomiques, ce nombre est appelé *nombre quantique radial.*

Montrons que les conditions selon lesquelles la fonction $x^{l+1/2}e^{-x/2}y(x)$ est continue et de carré intégrable découlent des contraintes initiales imposées à la fonction radiale $R(r)$, qui sont équivalentes à la condition de continuité de la fonction $x^l e^{-x/2}y(x)$ et de convergence de l'intégrale $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{2l+2}\,y^2(x)\,dx$.

En effet, sur tout intervalle fini $0 \leqslant x \leqslant x_0$, la continuité de la fonction $x^l e^{-x/2}y(x)$ entraîne celle de la fonction $x^{l+1/2}e^{-x/2}y(x)$, ce qui assure la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^{x_0} e^{-x}x^{2l+1}y^2(x)\,dx$. D'autre part, pour $x_0 > 1$ l'intégrale

$$\int\limits_{x_0}^\infty e^{-x}x^{2l+1}y^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{x_0}\int\limits_{x_0}^\infty e^{-x}x^{2l+2}y^2(x)\,dx < \infty,$$

ce qui démontre la convergence de l'intégrale $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{2l+1}y^2(x)\,dx$.

De la condition (10) on tire les valeurs possibles d'énergie

$$E = -\frac{Z^2}{2\,(n_r+l+1)^2} = -\frac{Z^2}{2n^2},$$

où $n = n_r + l + 1$. La valeur de l'énergie E est complètement définie par le nombre n. Pour cette raison on l'appelle *nombre quantique principal*. Pour un n donné, le nombre l (dit *nombre quantique orbital* ou *azimutal*) prend les valeurs $l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Pour la fonction radiale $R_{nl}(r)$, on obtient en définitive l'expression

$$R_{nl}(r) = C_{nl} e^{-x/2} x^{l+1} L_{n-l-1}^{2l+1}(x), \tag{11}$$

où

$$x = \frac{2Zr}{n}.$$

On trouvera la constante C_{nl} de la condition de normalisation (5):

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r)\,dr = 1,$$

ou bien

$$\frac{n}{2Z} C_{nl}^2 \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+2} \left[L_{n-l-1}^{2l+1}(x)\right]^2 dx = 1. \tag{12}$$

L'intégrale figurant dans (12) peut être calculée en utilisant la relation de récurrence pour les polynômes de Laguerre (voir § 9). On a

$$xL_{n-l-1}^{2l+1} = 2nL_{n-l-1}^{2l+1} - (n-l)\,L_{n-l}^{2l+1} - (n+l)\,L_{n-l-2}^{2l+1}. \tag{13}$$

D'où, en vertu de l'orthogonalité des polynômes de Laguerre, il vient

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{2l+2} \left[L_{n-l-1}^{2l+1}(x)\right]^2 dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} L_{n-l-1}^{2l+1}(x) \left[2nL_{n-l-1}^{2l+1}(x) + \ldots\right] dx =$$

$$= 2n \int_0^\infty e^{-x} x^{2l+1} \left[L_{n-l-1}^{2l+1}(x)\right]^2 dx = 2nd_{n-l-1}^2,$$

où d_{n-l-1}^2 est le carré de la norme du polynôme $L_{n-l-1}^{2l+1}(x)$ (voir § 7, 4). Aussi

$$C_{nl}^2 = \frac{Z}{n^2 d_{n-l-1}^2} = \frac{Z}{n^2}\,\frac{(n-l-1)\,!}{(n+l)\,!}. \tag{14}$$

La fonction radiale la plus simple correspond au cas $l = n - 1$:

$$R_{n,\,n-1}(r) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{Z}{(2n-1)!}}\,e^{-x/2}x^n.$$

Pour $l = 0$ la fonction radiale prend la forme la plus compliquée: elle possède alors le plus grand nombre de zéros possible pour n donné, égal à $n - 1$. Cependant, la relation entre la fonction d'onde et les angles θ, φ sera dans ce cas la plus simple: pour $l = 0$ la fonction d'onde est symétrique par rapport à une sphère, car

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

Connaissant les fonctions radiales $R_{nl}(r)$, il est possible de calculer diverses caractéristiques de l'atome hydrogénoïde, en particulier l'énergie potentielle moyenne $\overline{u}_{nl}$ de l'interaction électrostatique de l'électron avec le noyau, la distance moyenne $\overline{r}_{nl}$ entre l'électron et le noyau.

Utilisant (11) et (14), on obtient

$$\overline{u}_{nl} = -\int_0^\infty \frac{Z}{r}R_{nl}^2(r)\,dr = -ZC_{nl}^2\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+1}\,[L_{n-l-1}^{2l+1}(x)]^2\,dx =$$

$$= -ZC_{nl}^2\,d_{n-l-1}^2 = -\frac{Z}{n^2}.$$

Ainsi, l'énergie totale de l'électron E est égale à la moitié de l'énergie potentielle moyenne.

Ensuite,

$$\overline{r}_{nl} = \int_0^\infty rR_{nl}^2(r)\,dr = C_{nl}^2\left(\frac{n}{2Z}\right)^2\int_0^\infty e^{-x}x^{2l+1}\left[xL_{n-l-1}^{2l+1}(x)\right]^2dx.$$

Pour le calcul de l'intégrale, il suffit d'utiliser la relation de récurrence (13) et la propriété d'orthogonalité des polynômes de Laguerre:

$$\overline{r}_{nl} = C_{nl}^2\left(\frac{n}{2Z}\right)^2[(n-l)^2\,d_{n-l}^2 + 4n^2d_{n-l-1}^2 + (n+l)^2\,d_{n-l-2}^2] =$$

$$= C_{nl}^2\left(\frac{n}{2Z}\right)^2\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}\,2\,[3n^2 - l(l+1)] = \frac{1}{2Z}\,[3n^2 - l\,(l+1)].$$

Un autre exemple d'utilisation des fonctions d'onde hydrogénoïdes consiste dans le calcul du potentiel créé par l'atome hydrogénoïde.

Supposons que l'électron se mouvant dans le champ coulombien du noyau de charge Ze se trouve dans l'état stationnaire caractérisé par les nombres quantiques n, l, m. La masse de l'électron étant faible devant celle du noyau, on peut admettre, avec une bonne précision, que le noyau est immobile et se trouve dans un point $r = 0$. Cherchons le potentiel moyen $v(\mathbf{r})$ créé en $\mathbf{r}$ par l'électron et le noyau.

Puisque, avec les unités adoptées, le potentiel du noyau est égal à Z/r, on a

$$v(\mathbf{r}) = \frac{Z}{r} - \int\frac{|\psi_{nlm}(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}(r')^2\,dr'\,d\Omega'.$$

Pour calculer l'intégrale, il est commode d'employer la fonction génératrice pour les polynômes de Legendre et le théorème d'addition pour les fonctions

sphériques:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}P_s(\cos\omega)=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}\left[\frac{4\pi}{2s+1}\sum_{m'=-s}^{s}Y_{sm'}^{*}(\theta',\varphi')\,Y_{sm'}(\theta,\varphi)\right],$$

où ω est l'angle formé par les vecteurs $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}'$. Comme

$$\psi_{nlm}(\boldsymbol{r}')=\frac{1}{r'}R_{nl}(r')\,Y_{lm}(\theta',\varphi'),$$

on a

$$\int\frac{|\psi_{nlm}(\boldsymbol{r}')|^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}(r')^2\,dr'\,d\Omega'=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2s+1}\sum_{m'}Y_{sm'}(\theta,\varphi)\int_0^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}R_{nl}^2(r')\,dr'\times$$

$$\times\int Y_{lm}(\theta',\varphi')\,Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')\,Y_{sm'}^{*}(\theta',\varphi')\,d\Omega'.\qquad(15)$$

L'intégration par rapport à φ' donne que la somme en m' ne comporte qu'un seul terme correspondant à $m'=0$. On a en définitive

$$v(\boldsymbol{r})=\frac{Z}{r}-\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2s+1}Y_{s0}(\theta,\varphi)\int_0^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}R_{nl}^2(r')\,dr'\int Y_{lm}(\theta',\varphi')\times$$

$$\times\,Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')\,Y_{s0}^{*}(\theta',\varphi')\,d\Omega'.$$

L'intégrale $\int_0^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}R_{nl}^2(r')\,dr'$ peut être mise sous la forme

$$\int_0^{\infty}\frac{r_<^s}{r_>^{s+1}}R_{nl}^2(r')\,dr'=\frac{1}{r^{s+1}}\int_0^{r}(r')^s R_{nl}^2(r')\,dr'+r^s\int_r^{\infty}\frac{R_{nl}^2(r')}{(r')^{s+1}}\,dr'.$$

L'intégrale du produit de trois fonctions sphériques se réduit à celle du produit de trois fonctions $\Theta_{lm}(\cos\theta)$:

$$\int Y_{lm}(\theta',\varphi')\,Y_{lm}^{*}(\theta',\varphi')\,Y_{s0}^{*}(\theta',\varphi')\,d\Omega'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\Theta_{lm}^2(x)\,\Theta_{s0}(x)\,dx.$$

La dernière intégrale s'exprime en fonction des coefficients de Klebsch-Gordan, ou encore des coefficients de Wigner pour lesquels des tables spéciales ont été composées *). En vertu de l'orthogonalité des fonctions $\Theta_{lm}(x)$, elle n'est différente de zéro que pour $s=0, 2, \ldots, 2l$, c.-à-d. que la somme en s dans (15) contient un nombre fini de termes.

---

*) Voir par exemple [7].

Dans le cas où l'électron est dans son état fondamental ($n = 1$, $l = 0$), toutes les intégrales sont faciles à prendre. Il en vient

$$v(r) = \frac{Z-1}{r} + \left(Z + \frac{1}{r}\right) e^{-2Zr}.$$

Pour des r petits on a, comme il fallait s'y attendre, $v(r) \approx \frac{Z}{r}$, tandis que pour $r \to \infty$ on a $v(r) \approx \frac{Z-1}{r}$ (le potentiel du noyau blindé par l'électron).

3. Oscillateur harmonique. Le problème de l'oscillateur harmonique joue un rôle fondamental dans le développement de l'électrodynamique quantique; il est fréquemment employé lors de l'étude d'oscillations diverses dans les cristaux et les molécules.

En physique classique, l'oscillateur harmonique linéaire se réalise dans un système exempt de frottement et régi par les lois de Newton si dans ce système une particule de masse m est sollicitée par une force élastique $F = -m\omega^2 x$ (x est l'écart de la particule de sa position d'équilibre). L'énergie potentielle de l'oscillateur est de la forme $U = \frac{m\omega^2}{2} x^2$. Sous l'action de la force F la particule fera des oscillations harmoniques de fréquence ω autour de sa position d'équilibre.

Cherchons à établir les états stationnaires de l'oscillateur harmonique par les méthodes de mécanique quantique. L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\psi(x)$ de l'oscillateur harmonique se présente sous la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi = E\psi \quad (-\infty < x < \infty).$$

On demande de trouver les valeurs de E telles que la fonction $\psi(x)$ soit continue et vérifie la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)\, dx = 1.$$

Au lieu de la coordonnée x et de l'énergie E, il est commode d'introduire des variables sans dimension ξ et ε:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, \xi = \alpha\xi, \quad E = \hbar\omega\varepsilon.$$

Alors, on obtient l'équation

$$\psi'' + (2\varepsilon - \xi^2)\psi = 0 \tag{16}$$

(l'apostrophe désignant ici la dérivation par rapport à ξ). L'équation (16) est une équation généralisée du type hypergéométrique pour laquelle (voir § 10, 2)

$$\sigma(\xi) = 1, \quad \tilde{\tau}(\xi) = 0, \quad \tilde{\sigma}(\xi) = 2\varepsilon - \xi^2.$$

Lorsque l'équation (16) est réduite à l'équation du type hypergéométrique, une seule valeur de k est possible: $k = 2\varepsilon$. Cela étant,

$$\pi_1(\xi) = \pm\, \xi.$$

Choisissons parmi les formes possibles de la fonction

$$\tau(\xi) = \tilde{\tau}(\xi) - 2\pi_1(\xi)$$

celle qui puisse satisfaire aux conditions imposées à $\tau(\xi)$ pour les polynômes orthogonaux classiques, c.-à-d. $\tau'(\xi) < 0$. Il vient alors

$$\pi_1(\xi) = \xi, \quad \tau(\xi) = -2\xi,$$
$$\varphi(\xi) = e^{\xi^2/2}, \quad \lambda = k - \pi_1'(\xi) = 2\varepsilon - 1,$$
$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} y(\xi),$$

où la fonction $y(\xi)$ satisfait à l'équation du type hypergéométrique

$$y'' - 2\xi y' + \lambda y = 0, \quad \lambda = 2\varepsilon - 1. \tag{17}$$

L'équation (17) appartient au type d'équations que l'on a étudiées au § 14. Pour cette équation $\rho(\xi) = \exp(-\xi^2)$. Comme on a déjà vu au § 14, l'équation (17) admet des solutions non triviales $y(\xi)$, pour lesquelles la fonction

$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} y(\xi)$$

sera continue et de carré intégrable pour $-\infty < \xi < \infty$, seulement dans le cas où

$$\lambda = 2n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{18}$$
$$y(\xi) = C_n H_n(\xi).$$

Ici $H_n(\xi)$ est un polynôme d'Hermite.

La condition (18) donne les valeurs possibles de l'énergie

$$E_n = (n + {}^1/_2)\, \hbar\omega.$$

La fonction d'onde $\psi(x)$ a pour expression définitive

$$\psi_n(x) = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad x = \alpha\xi, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

On obtient sans peine la constante C_n de la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\, dx = 1,$$

d'où

$$\alpha C_n^2 d_n^2 = 1, \tag{19}$$

où

$$d_n^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

est le carré de la norme des polynômes d'Hermite (voir § 7, 4). Aussi

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Considérons un exemple d'utilisation des fonctions d'onde de l'oscillateur: calculons quelques caractéristiques de mécanique quantique de celui-ci, qui sont employées en théorie quantique du rayonnement, à savoir, les éléments matriciels de la coordonnée x_{mn} et l'énergie potentielle moyenne $\bar{u}_n$. On a

$$x_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\, x\psi_n(x)\, dx = \alpha^2 C_m C_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi)\, \xi H_n(\xi)\, d\xi.$$

Calculons l'intégrale à l'aide de la relation de récurrence pour les polynômes d'Hermite (voir § 9)

$$x_{mn} = \alpha^2 C_m C_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_m(\xi) \left[\frac{1}{2} H_{n+1}(\xi) + nH_{n-1}(\xi)\right] d\xi.$$

En vertu de l'orthogonalité des polynômes d'Hermite les éléments matriciels de x_{mn} ne seront non nuls que pour $m = n \pm 1$. Pour les calculer, utilisons (19) et la relation évidente

$$\frac{C_n}{C_{n+1}} = \sqrt{2(n+1)}. \tag{20}$$

On a alors, pour $m = n+1$,

$$x_{n+1,\,n} = \frac{1}{2} \alpha^2 C_n C_{n+1} d_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \alpha \frac{C_n}{C_{n+1}} \alpha C_{n+1}^2 d_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \alpha \frac{C_n}{C_{n+1}} = \alpha \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Comme $x_{mn} = x_{nm}$, on a

$$x_{n-1,\,n} = x_{n,\,n-1} = \alpha \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Ensuite, l'énergie potentielle moyenne de l'oscillateur harmonique est

$$\bar{u}_n = \int_{-\infty}^{\infty} U(x)\, \psi_n^2(x)\, dx = \frac{1}{2} m\omega^2 \alpha^3 C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} [\xi H_n(\xi)]^2\, d\xi.$$

Pour le calcul de l'intégrale, utilisons de nouveau la relation de récurrence et la propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite, ainsi que les relations (19) et (20):

$$\bar{u}_n = \frac{1}{2} m\omega^2 \alpha^3 C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \left[\frac{1}{2} H_{n+1}(\xi) + nH_{n-1}(\xi)\right]^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \alpha^3 C_n^2 \left(\frac{1}{4} d_{n+1}^2 + n^2 d_{n-1}^2\right) = \frac{m\omega^2\alpha^2}{2} \left[\frac{1}{4}\left(\frac{C_n}{C_{n+1}}\right)^2 + n^2 \left(\frac{C_n}{C_{n-1}}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} E_n.$$

Ce résultat coïncide avec le résultat correspondant de la théorie classique.

§ 17*. Polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète

1. Définition. Au § 4, on a donné la définition des polynômes $p_n(x)$ orthogonaux sur l'intervalle (a, b) par rapport au poids $\rho(x)$ à l'aide de la notion de produit scalaire

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) \, dx. \tag{1}$$

Il est également possible d'envisager le produit scalaire de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ d'une forme quelque peu différente si l'on remplace dans (1) l'intégrale définie par la somme:

$$(f, g) = \sum_i f(x_i) g(x_i) \mu_i. \tag{2}$$

Ici $\mu_i > 0$; la sommation se fait sur les valeurs de x_i qui vérifient l'inégalité $a \leqslant x_i < b$.

Pour le produit scalaire (2) on peut reprendre tous les raisonnements auxquels on a procédé dans le § 4. En particulier, s'il existe des moments

$$C_n = \sum_i x_i^n \mu_i \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

il est possible d'introduire un système de polynômes $\{p_n(x)\}$ tel qu'il vérifie les relations d'orthogonalité

$$(p_n, p_m) = 0, \; m \neq n. \tag{3}$$

Nous allons appeler de tels polynômes les *polynômes orthogonaux d'une variable discrète*. Les mêmes propriétés que l'on a établies dans le § 5 pour les polynômes orthogonaux sur l'intervalle (a, b) par rapport à un poids $\rho(x)$ sont valables pour ces polynômes. En particulier, la condition (3) sera équivalente à la condition

$$(p_n, x^m) = 0, \; m < n. \tag{4}$$

Il est possible d'étendre aux polynômes orthogonaux d'une variable discrète la définition des polynômes orthogonaux classiques, toutes les propriétés fondamentales de ceux-ci étant conservées.

Introduisons les notations

$$f(x_i) = f_i, \; \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

D é f i n i t i o n. *Soient dans* (2) $i_1 \leqslant i \leqslant i_2 - 1$, $x_{i_1} = a$, $x_{i_2} = b$, $\mu_i = \rho(x_i) \Delta x_i$, *les points* x_i *étant liés par la relation* $x_{i+1} = \alpha x_i + \beta$ (α et β *sont des constantes*). *Les polynômes* $p_n(x)$ *vérifiant les relations d'orthogonalité* (3) *portent le nom de polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète si le poids* $\rho(x)$ *satisfait à l'équation aux différences de la forme*

$$\mathcal{L}[\sigma(x) \rho(x)] = \tau(x) \rho(x) \tag{5}$$

et aux conditions aux limites *)

$$\sigma_i \rho_i x_i^m \big|_{x_i = a, b} = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Ici

$$\mathcal{L} f(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \; \Delta f(x) = f(\alpha x + \beta) - f(x), \; \Delta x = (\alpha x + \beta) - x,$$

et $\sigma(x)$ *et* $\tau(x)$ *sont les polynômes de degré non supérieur respectivement à 2 et à 1.*

*) Les conditions aux limites (6) peuvent être déduites de l'équation (5) et de la condition d'existence des moments de la fonction de poids (voir § 6).

Dans la suite, nous allons employer aussi la désignation

$$\mathscr{M}f(x)=\mathscr{L}f(t)\Big|_{t=\frac{x-\beta}{\alpha}}=\frac{f(x)-f\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)}{x-\frac{x-\beta}{\alpha}}.$$

Remarquons que

$$\mathscr{L}f(x_i)=\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i},\quad \mathscr{M}f(x_i)=\frac{f_i-f_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}=\mathscr{L}f(x_{i-1}).$$

Les expressions $\mathscr{L}p_n(x)$ et $\mathscr{M}p_n(x)$ jouent en théorie des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète le même rôle que la dérivée $p'_n(x)$ en théorie des polynômes orthogonaux classiques ordinaires.

De la relation de la forme $x_{i+1}=\alpha x_i+\beta$ il découle que pour tout polynôme $\pi_m(x)$ les expressions $\mathscr{L}\pi_m(x)$ et $\mathscr{M}\pi_m(x)$ seront des polynômes de degré $m-1$. En particulier $\mathscr{L}\pi_1(x)=\mathscr{M}\pi_1(x)=\pi'_1(x)$. Quand $\alpha=1$, on se trouve en présence d'une suite de points équidistants x_i. Les polynômes orthogonaux correspondants d'une variable discrète sont très couramment utilisés en pratique, par exemple dans certaines applications de la théorie des probabilités.

2. Quelques formules de différences. Avant de passer à l'étude des propriétés des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète, établissons certaines règles afin de pouvoir opérer avec les expressions de la forme $\mathscr{L}f(x)$ et $\mathscr{M}f(x)$. On a

$$\mathscr{L}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]=c_1\mathscr{L}f_1(x)+c_2\mathscr{L}f_2(x), \tag{7}$$

$$\mathscr{L}[f(x)g(x)]=f(x)\mathscr{L}g(x)+g[t_1(x)]\mathscr{L}f(x), \tag{8}$$

$$\mathscr{M}[f(x)g(x)]=f(x)\mathscr{M}g(x)+g[t_{-1}(x)]Mf(x). \tag{9}$$

Ici

$$t_0(x)=x,\quad t_{k+1}(x)=t_k(\alpha x+\beta)=\alpha t_k(x)+\beta\qquad (k=0,\ \pm 1,\ \ldots),$$

c.-à-d.

$$t_k(x)=x+\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\Delta x=\alpha^k x+\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\beta.$$

A l'aide de l'égalité

$$\Delta t\,|_{t=t_k(x)}=\alpha^k\Delta x,$$

on établit sans peine qu'entre les expressions $\mathscr{L}f(x)$ et $\mathscr{M}f(x)$ il existe la relation suivante:

$$\mathscr{L}f(t)\,|_{t=t_{k-1}(x)}=\frac{1}{\alpha^{k-1}}\mathscr{L}f[t_{k-1}(x)]=\mathscr{M}f(t)\,|_{t=t_k(x)}=\frac{1}{\alpha^k}\mathscr{M}f[t_k(x)]. \tag{10}$$

D'autre part, nous aurons besoin d'une formule analogue à la formule de Leibniz pour la dérivation du produit de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, dont l'une est un polynôme du premier degré:

$$\mathscr{M}^m[f(x)g(x)]=f(x)\mathscr{M}^m g(x)+\frac{\alpha^m-1}{\alpha^{m-1}(\alpha-1)}f'(x)[\mathscr{M}^{m-1}g(t)]\,|_{t=t_{-1}(x)}, \tag{11}$$

où $f(x)$ est le polynôme du premier degré.

Pour démontrer la formule (11), procédons par la méthode de récurrence. Quand $m=1$, la formule (11) coïncide avec (9). Supposons

que cette formule soit vérifiée pour $1 \leqslant m \leqslant n$. Puisque la fonction $\mathcal{M}f(x) = f'(x)$ ne dépend pas de x, on a

$$\mathcal{M}^{n+1}[f(x)g(x)] =$$
$$= \mathcal{M}\left\{f(x)\mathcal{M}^n g(x) + \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n-1}(\alpha-1)} f'(x)[\mathcal{M}^{n-1}g(t)]\big|_{t=t_{-1}(x)}\right\} =$$
$$= f(x)\mathcal{M}^{n+1}g(x) + f'(x)[\mathcal{M}^n g(t)]\big|_{t=t_{-1}(x)} +$$
$$+ \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^n(\alpha-1)} f'(x)[\mathcal{M}^n g(t)]\big|_{t=t_{-1}(x)},$$

ce qui coïncide avec (11) pour $m = n + 1$.

3. Orthogonalité des dérivées aux différences. Puisque les différentes propriétés des polynômes orthogonaux classiques ont été établies principalement à l'aide de la méthode d'intégration par parties, il s'agit de trouver maintenant son analogue pour le cas de la différence. Pour ce faire, il suffit de sommer les égalités évidentes qui résultent de (8) quand $x = x_i$:

$$\Delta(f_i g_i) = f_i \Delta g_i + g_{i+1}\Delta f_i. \tag{12}$$

On obtient ainsi la *formule de sommation par parties*:

$$\sum_i f_i \Delta g_i = f_i g_i \big|_{x_i=a}^{b} - \sum_i g_{i+1}\Delta f_i. \tag{13}$$

Ici comme plus loin, on fait la sommation sur les valeurs $i = i_1, i_1 + 1, \ldots \ldots, i_2 - 1$ $(x_{i_1} = a, x_{i_2} = b)$.

Déduisons d'abord la propriété des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète analogue à la propriété d'orthogonalité des dérivées des polynômes orthogonaux classiques ordinaires. On a

$$\sum_i x_i^{m-1} p_n(x_i)\tau_i\rho_i\Delta x_i = 0 \quad \text{pour} \quad m < n,$$

car l'expression $x^{m-1}\tau(x)$ est un polynôme de degré m. D'autre part, en utilisant l'équation aux différences (5) pour ρ_i et la formule (12), on obtient

$$x_i^{m-1}\tau_i\rho_i\Delta x_i = x_i^{m-1}\Delta(\sigma_i\rho_i) = \Delta(x_{i-1}^{m-1}\sigma_i\rho_i) - \sigma_i\rho_i\Delta x_{i-1}^{m-1}.$$

Aussi

$$\sum_i x_i^{m-1} p_n(x_i)\tau_i\rho_i\Delta x_i = \sum_i p_n(x_i)\Delta(x_{i-1}^{m-1}\sigma_i\rho_i) -$$
$$- \sum_i p_n(x_i)\sigma_i \frac{\Delta x_{i-1}^{m-1}}{\Delta x_i}\rho_i\Delta x_i = 0. \tag{14}$$

Puisque $x_{i-1} = \frac{1}{\alpha}(x_i - \beta)$, l'expression $\sigma_i \frac{\Delta x_{i-1}^{m-1}}{\Delta x_i}$ représente un polynôme de degré m en x_i; donc, en vertu de la propriété d'orthogonalité (4), la deuxième somme de (14) est égale à zéro. Faisons la transformation de la première somme au moyen de la formule de sommation par parties (13):

$$\sum_i p_n(x_i)\Delta(x_{i-1}^{m-1}\sigma_i\rho_i) = p_n(x_i)x_{i-1}^{m-1}\sigma_i\rho_i\big|_{x_i=a}^{b} - \sum_i x_i^{m-1}\sigma_{i+1}\rho_{i+1}\Delta p_n(x_i).$$

Conformément aux conditions aux limites (6) la substitution est égale à zéro. L'égalité (14) devient donc

$$\sum_i x_i^{m-1}\mathcal{L}p_n(x)\big|_{x=x_i}\rho_1(x_i)\Delta x_i = 0, \quad m < n,$$

où

$$\rho_1(x_i) = \sigma_{i+1}\rho_{i+1}.$$

Les polynômes $\mathscr{L}p_n(x)$ sont donc des polynômes d'une variable discrète orthogonaux par rapport au poids

$$\rho_1(x) = \sigma[t_1(x)]\,\rho[t_1(x)] = [\sigma(x) + \tau(x)\,\Delta x]\,\rho(x).$$

Montrons que $\mathscr{L}p_n(x)$ sont des polynômes orthogonaux classiques. Pour cela, il suffit de s'assurer que le poids $\rho_1(x)$ vérifie l'équation aux différences et les conditions aux limites de la forme (5) et (6). Conformément à (8),

$$\mathscr{L}[\sigma(x)\,\rho_1(x)] = \rho_1(x)\,\mathscr{L}\sigma(x) + \sigma[t_1(x)]\,\mathscr{L}\rho_1(x).$$

Puisque

$$\mathscr{L}\rho_1(x) = \mathscr{L}\{\sigma[t_1(x)]\,\rho[t_1(x)]\} = \\ = \alpha\mathscr{L}[\sigma(t)\,\rho(t)]\,|_{t=t_1(x)} = \alpha\tau[t_1(x)]\,\rho[t_1(x)],$$

on a

$$\mathscr{L}[\sigma(x)\,\rho_1(x)] = \{\mathscr{L}\sigma(x) + \alpha\tau[\tau_1(x)]\}\,\rho_1(x).$$

Nous avons obtenu une équation aux différences de la forme (5) pour le poids $\rho_1(x)$, car l'expression

$$\tau_1(x) = \mathscr{L}\sigma(x) + \alpha\tau[t_1(x)]$$

est un polynôme de premier degré au plus.

Voyons si les conditions aux limites sont remplies. On a

$$x_i^m\sigma_i\rho_1(x_i)\,|_{x_i=a,\,b} = x_i^m(\sigma_i + \tau_i\Delta x_i)\,\sigma_i\rho_i\,|_{x_i=a,\,b} = 0$$

en vertu des conditions aux limites (6).

On vient de montrer que les polynômes $\mathscr{L}p_n(x)$ sont des polynômes classiques d'une variable discrète orthogonaux par rapport au poids

$$\rho_1(x) = \sigma[t_1(x)]\,\rho[t_1(x)].$$

Par la méthode de récurrence, on est amené au théorème suivant.

Théorème 1. *Les polynômes $\mathscr{L}^m p_n(x)$ sont des polynômes classiques d'une variable discrète orthogonaux par rapport au poids*

$$\rho_m(x) = \rho(t_m)\prod_{k=1}^{m}\sigma(t_k) \tag{15}$$

satisfaisant à l'équation aux différences

$$\mathscr{L}[\sigma(x)\,\rho_m(x)] = \tau_m(x)\,\rho_m(x),$$

où

$$\tau_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\mathscr{L}\sigma[t_k(x)] + \alpha^m\tau[t_m(x)]. \tag{16}$$

4. Equation aux différences. Utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes $\mathscr{L}p_n(x)$, nous obtenons l'équation aux différences pour $p_n(x)$ analogue à l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques ordinaires. Quand $m < n$, on a

$$\sum_i \mathscr{L}p_n(x_i)\,\mathscr{L}x_i^m\rho_1(x_i)\,\Delta x_i = \sum_i \mathscr{L}p_n(x_i)\,\sigma_{i+1}\rho_{i+1}\Delta x_i^m = 0, \tag{17}$$

car l'expression $\mathscr{L}x^m$ est un polynôme de degré $m - 1$.

Transformons le premier membre de (17) à l'aide de la sommation par parties, en posant dans (13) $f_i = x_i^m$, $g_{i+1} = \sigma_{i+1}\rho_{i+1}\mathcal{L}p_n(x_i) = \sigma_{i+1}\rho_{i+1}\mathcal{M}p_n(x_{i+1})$:

$$\sum_i \mathcal{L}p_n(x_i)\,\sigma_{i+1}\rho_{i+1}\Delta x_i^m = x_i^m\sigma_i\rho_i\mathcal{M}p_n(x_i)\Big|_{x_i=a}^{b} - \sum_i x_i^m\Delta[\sigma_i\rho_i\mathcal{M}p_n(x_i)].$$

La substitution s'annule en vertu des conditions aux limites (6). Aussi

$$\sum_i x_i^m\Delta[\sigma_i\rho_i\mathcal{M}p_n(x_i)] = \sum_i x_i^m\tilde{p}_n(x_i)\,\rho_i\Delta x_i = 0 \quad (m<n), \tag{18}$$

où $\tilde{p}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)}\mathcal{L}[\sigma(x)\rho(x)\mathcal{M}p_n(x)]$. Utilisant les relations (8) et (10), mettons l'expression pour $\tilde{p}_n(x)$ sous une forme différente :

$$\tilde{p}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)}\{\sigma(x)\rho(x)\mathcal{L}\mathcal{M}p_n(x) + \mathcal{L}p_n(x)\mathcal{L}[\sigma(x)\rho(x)]\} =$$
$$= \sigma(x)\mathcal{L}\mathcal{M}p_n(x) + \tau(x)\mathcal{L}p_n(x).$$

Les fonctions $\mathcal{L}p_n(x)$ et $\mathcal{L}\mathcal{M}p_n(x)$ sont des polynômes de degré $n-1$ et $n-2$ respectivement. Aussi $\tilde{p}_n(x)$ sera-t-il un polynôme de degré n. Puisque, selon (18), le polynôme $\tilde{p}_n(x)$ est orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ à toute puissance inférieure à n, il ne différera du polynôme $p_n(x)$, en vertu de l'unicité de système de polynômes orthogonaux par rapport au poids donné, que par un facteur constant, d'où l'on tire

$$\tilde{p}_n(x) = -\lambda_n p_n(x),$$

où λ_n est une constante.

Ainsi, nous avons obtenu pour les polynômes $p_n(x)$ l'équation aux différences du deuxième ordre

$$\mathcal{L}[\sigma(x)\rho(x)\mathcal{M}p_n(x)] + \lambda_n\rho(x)p_n(x) = 0 \tag{19}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sigma(x)\mathcal{L}\mathcal{M}p_n(x) + \tau(x)\mathcal{L}p_n(x) + \lambda_n p_n(x) = 0. \tag{20}$$

Pour déterminer la constante λ_n, il suffit de comparer dans (20) les coefficients de x^n. Comme

$$\mathcal{L}x^n = \frac{(\alpha x+\beta)^n - x^n}{(\alpha-1)x+\beta} = \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}x^{n-1}+\ldots,$$
$$\mathcal{M}x^n = \frac{\alpha^n-1}{\alpha^{n-1}(\alpha-1)}x^{n-1}+\ldots,$$

il vient

$$\lambda_n = -\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\left[\tau' + \frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha^{n-1}(\alpha-1)}\frac{\sigma''}{2}\right]. \tag{21}$$

L'équation (19) peut être récrite autrement, à l'aide de la relation (10). On a

$$\mathcal{L}[\sigma(x)\rho(x)\mathcal{M}p_n(x)] = \frac{1}{\alpha}\mathcal{M}\{[\sigma(t)\rho(t)\mathcal{M}p_n(t)]\,|_{t=t_1(x)}\} =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\mathcal{M}[\rho_1(x)\mathcal{L}p_n(x)].$$

On arrive ainsi à l'équation suivante pour $p_n(x)$:

$$\mathcal{M}[\rho_1(x)\mathcal{L}p_n(x)] + \alpha\lambda_n\rho(x)p_n(x) = 0. \tag{22}$$

Comme les polynômes $\mathscr{L}^m p_n(x)$ sont des polynômes classiques orthogonaux par rapport au poids $\rho_m(x)$, ils vérifient évidemment l'équation aux différences qu'on déduit de (22) en remplaçant n par $n-m$, $\rho(x)$ par $\rho_m(x)$, $\rho_1(x)$ par $\rho_{m+1}(x)$ et $\tau(x)$ par $\tau_m(x)$. Aussi

$$\rho_m(x)\mathscr{L}^m p_n(x) = -\frac{1}{\alpha\lambda_{nm}}\mathscr{M}[\rho_{m+1}(x)\mathscr{L}^{m+1}p_n(x)],$$

où

$$\lambda_{nm} = -\frac{\alpha^{n-m}-1}{\alpha-1}\left[\tau_m' + \frac{\alpha^{n-m-1}-1}{\alpha^{n-m-1}(\alpha-1)}\frac{\sigma''}{2}\right].$$

On en tire successivement

$$\rho(x)p_n(x) = -\frac{1}{\alpha\lambda_{n0}}\mathscr{M}[\rho_1(x)\mathscr{L}p_n(x)] =$$

$$= \left(-\frac{1}{\alpha\lambda_{n0}}\right)\mathscr{M}\left\{\left(-\frac{1}{\alpha\lambda_{n1}}\right)\mathscr{M}[\rho_2(x)\mathscr{L}^2p_n(x)]\right\} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^m}{\alpha^m\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}}\mathscr{M}^m[\rho_m(x)\mathscr{L}^m p_n(x)].$$

On aboutit ainsi à une équation aux différences d'ordre $2m$ pour les polynômes $p_n(x)$:

$$\mathscr{M}^m[\rho_m(x)\mathscr{L}^m p_n(x)] = A_{nm}\rho(x)p_n(x), \tag{23}$$

où

$$A_{nm} = (-\alpha)^m\prod_{k=0}^{m-1}\lambda_{nk}. \tag{24}$$

5. **Formule de Rodrigues.** Si l'on pose dans (23) $m = n$, on obtient pour les polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète l'analogue de la formule de Rodrigues:

$$p_n(x) = \frac{A_n}{\rho(x)}\mathscr{M}^n[\rho_n(x)], \tag{25}$$

où

$$A_n = \frac{1}{A_{nn}}\mathscr{L}^n p_n(x). \tag{26}$$

Citons en outre l'analogue de la formule de Rodrigues pour le polynôme $\mathscr{L}^m p_n(x)$ que l'on déduit de (25) en changeant $\rho(x)$ en $\rho_m(x)$. Ce faisant, il convient de substituer à la fonction $\rho_n(x)$ le poids par rapport auquel sont orthogonaux les polynômes $\mathscr{L}^{n-m}[\mathscr{L}^m p_n(x)] = \mathscr{L}^n p_n(x)$, ce qui veut dire que la fonction $\rho_n(x)$ doit être laissée inchangée. Il en résulte:

$$\mathscr{L}^m p_n(x) = B_{nm}\frac{1}{\rho_m(x)}\mathscr{M}^{n-m}[\rho_n(x)]. \tag{27}$$

Pour rechercher la constante B_{nm}, il suffit de porter dans (23) l'expression (27) de $\mathscr{L}^m p_n(x)$:

$$B_{nm} = A_{nm}A_n. \tag{28}$$

6. **Relations de récurrence.** Les polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète vérifient les relations de récurrence qu'on tire des relations de la forme (4) et (5) du § 9 en mettant $\mathscr{M}p_n(x)$ au lieu de $p_n'(x)$. On peut déduire

ces relations au moyen de la formule de Rodrigues. Puisque

$$\rho_{n+1}(x) = \sigma[t_1(x)]\,\rho_n[t_1(x)],$$

il découle de la formule de Rodrigues pour $p_{n+1}(x)$ que

$$p_{n+1}(x) = \frac{A_{n+1}}{\rho(x)}\mathcal{M}^{n+1}\{\sigma[t_1(x)]\,\rho_n[t_1(x)]\} =$$

$$= \frac{\alpha A_{n+1}}{\rho(x)}\mathcal{M}^n\mathcal{L}[\sigma(x)\,\rho_n(x)] = \frac{\alpha A_{n+1}}{\rho(x)}\mathcal{M}^n[\tau_n(x)\,\rho_n(x)].$$

Pour rechercher l'expression $\mathcal{M}^n[\tau_n(x)\,\rho_n(x)]$, utilisons l'analogue de la formule de Leibniz (11):

$$\mathcal{M}^n[\tau_n(x)\,\rho_n(x)] = \tau_n(x)\,\mathcal{M}^n\rho_n(x) + \frac{\alpha^n-1}{\alpha^{n-1}(\alpha-1)}\tau_n'[\mathcal{M}^{n-1}\rho_n(t)]\,|_{t=t_{-1}(x)}.$$

Or, conformément à (25), (27), (28), (24) et (10), on a

$$\mathcal{M}^n\rho_n(x) = \frac{1}{A_n}\rho(x)\,p_n(x),$$

$$\mathcal{M}^{n-1}\rho_n(t)\,|_{t=t_{-1}(x)} = \frac{1}{B_{n,1}}\rho_1(t)\,\mathcal{L}p_n(t)\,|_{t=t_{-1}(x)} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha\lambda_n A_n}\sigma(x)\,\rho(x)\,\mathcal{M}p_n(x).$$

C'est pourquoi

$$p_{n+1}(x) = \alpha\frac{A_{n+1}}{A_n}\left[\tau_n(x)\,p_n(x) - \frac{(\alpha^n-1)\,\tau_n'}{\alpha^n(\alpha-1)\,\lambda_n}\sigma(x)\,\mathcal{M}p_n(x)\right],$$

d'où

$$\sigma(x)\,\mathcal{M}p_n(x) = \frac{\alpha^n(\alpha-1)\,\lambda_n}{(\alpha^n-1)\,\tau_n'}\left[-\frac{A_n}{\alpha A_{n+1}}p_{n+1}(x) + \tau_n(x)\,p_n(x)\right]. \qquad (29)$$

La dernière relation est analogue à la formule (4) du § 9. Les autres relations de récurrence découlent de (29) et de l'équation aux différences (20) pour $p_n(x)$.

Pour déduire une relation analogue à la formule (5) du § 9, remarquons que, conformément à (29),

$$\mathcal{L}[\sigma(x)\,\mathcal{M}p_n(x)] =$$

$$= \frac{\alpha^n(\alpha-1)\,\lambda_n}{(\alpha^n-1)\,\tau_n'}\left\{-\frac{A_n}{\alpha A_{n+1}}\mathcal{L}p_{n+1}(x) + \mathcal{L}[\tau_n(x)\,p_n(x)]\right\}. \qquad (30)$$

Ensuite,

$$\mathcal{L}[\tau_n(x)\,p_n(x)] = \tau_n(x)\,\mathcal{L}p_n(x) + \tau_n' p_n[t_1(x)],$$

$$\mathcal{L}[\sigma(x)\,\mathcal{M}p_n(x)] = \sigma(x)\,\mathcal{L}\mathcal{M}p_n(x) + \mathcal{L}p_n(x)\,\mathcal{L}\sigma(x) =$$

$$= -\tau(x)\,\mathcal{L}p_n(x) - \lambda_n p_n(x) + \mathcal{L}p_n(x)\,\mathcal{L}\sigma(x).$$

Puisque

$$p_n(x) = p_n[t_1(x)] - \Delta x\mathcal{L}p_n(x),$$

la relation (30) peut s'écrire comme suit:

$$p_n[t_1(x)] = C_n\mathcal{L}p_{n+1}(x) + \pi_n(x)\,\mathcal{L}p_n(x), \qquad (31)$$

où C_n est une constante et $\pi_n(x)$ un polynôme de degré 1 au plus.

Remplaçant dans (31) x par $t_{-1}(x)$, on obtient en résultat

$$p_n(x) = C_n\mathcal{M}p_{n+1}(x) + \pi_n[t_{-1}(x)]\,\mathcal{M}p_n(x). \qquad (32)$$

Cette relation est analogue à la formule (5) du § 9, car la fonction $\pi_n [t_{-1}(x)]$ est un polynôme de degré 1 au plus par rapport à x.

Portant dans (32) l'expression de $\mathcal{M}p_n(x)$ tirée de (29), on obtient une relation analogue à la formule (1) du § 9.

7. Quelques types de polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète. Mettons sous forme explicite le poids $\rho(x)$ quand

$$\alpha = 1, \ \beta = 1, \ x_i = i.$$

L'équation aux différences (5) devient dans ce cas

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \frac{\sigma(x)+\tau(x)}{\sigma(x+1)}. \tag{33}$$

Notons une propriété évidente des solutions de l'équation aux différences

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = f(x),$$

où la fonction $f(x)$ est définie.

Si $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ *ou* $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, *on a respectivement* $\rho(x) = C\rho_1(x)\rho_2(x)$ *ou* $\rho(x) = C\dfrac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}$. *Ici* C *est une constante arbitraire et les fonctions* $\rho_1(x)$ *et* $\rho_2(x)$ *sont solutions des équations aux différences*

$$\frac{\rho_1(x+1)}{\rho_1(x)} = f_1(x), \quad \frac{\rho_2(x+1)}{\rho_2(x)} = f_2(x).$$

Puisque le deuxième membre de l'équation (33) est une fonction rationnelle, on peut, en s'appuyant sur la remarque ci-dessus, exprimer sa solution en fonction de celles des équations aux différences

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \gamma + x, \tag{34}$$

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \gamma - x, \tag{35}$$

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)} = \gamma. \tag{36}$$

Comme $\gamma + x = \dfrac{\Gamma(\gamma+x+1)}{\Gamma(\gamma+x)}$, la solution particulière de l'équation (34) est de la forme $\rho(x) = \Gamma(\gamma + x)$. De même, utilisant la représentation

$$\gamma - x = \frac{\Gamma(\gamma-x+1)}{\Gamma(\gamma-x)} = \frac{1}{\Gamma[(\gamma+1)-(x+1)]} : \frac{1}{\Gamma(\gamma+1-x)},$$

on recherche la solution particulière de l'équation (35) :

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1-x)}.$$

On obtient sans difficulté que l'équation (36) a pour solution particulière la fonction $\rho(x) = \gamma^x$. Compte tenu de ces considérations, nous allons chercher les solutions de l'équation (33) pour différents cas particuliers.

1) Soit $a = 0$, $b = N$, $\sigma(x) = x(N - x)$. Alors

$$\sigma(x) + \tau(x) = (x + \gamma)(\delta - x),$$

où γ et δ sont des constantes. L'équation (33) devient alors

$$\frac{\rho(x+1)}{\rho(x)}=\frac{(x+\gamma)(\delta-x)}{(x+1)(N-1-x)}.$$

Elle aura comme solution particulière la fonction

$$\rho(x)=C\frac{\Gamma(\gamma+x)\,\Gamma(N-x)}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(\delta+1-x)}. \tag{37}$$

Les conditions aux limites (6) et les conditions de positivité du poids $\rho(x_i)$ seront vérifiées notamment quand on aura $C>0$, $\gamma>0$, $\delta+1\geqslant N$. Les polynômes orthogonaux correspondants sont dits *polynômes de Hahn*. Posant dans (37) $C=1$, $\gamma=1$, $\delta+1=N$, nous aboutissons aux *polynômes de Tchébychev d'une variable discrète*, pour lesquels $\rho(x)=1$.

Les polynômes de Tchébychev d'une variable discrète s'appliquent, par exemple, lors de traitement des observations par la méthode des moindres carrés, au calcul des sommes de la forme $\sum_{k=0}^{N-1} f(k)$ d'après les formules de quadratures du type de Gauss (voir Complément).

2) Soient $a=0$, $b=\infty$, $\sigma(x)=x$. Trois cas sont à envisager alors:

$$\sigma(x)+\tau(x)=\begin{cases}\mu(\gamma+x),\\ \mu(\gamma-x),\\ \mu.\end{cases}$$

Ici μ et γ sont des constantes. L'équation (33) admettra alors les solutions suivantes:

$$\rho(x)=\begin{cases} C\mu^x\dfrac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(x+1)},\\ \dfrac{C\mu^x}{\Gamma(x+1)\,\Gamma(\gamma+1-x)},\\ \dfrac{C\mu^x}{\Gamma(x+1)}.\end{cases}$$

Dans le premier cas, les conditions aux limites (6) et les conditions de positivité du poids $\rho(x_i)$ seront remplies si l'on pose $0<\mu<1$, $\gamma>0$, $C=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}$. On aura donc

$$\rho(x)=\frac{\mu^x(\gamma)_x}{\Gamma(x+1)},\quad (\gamma)_x=\frac{\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Les polynômes correspondants sont les *polynômes de Meixner*.

En raisonnant de la même façon, dans le deuxième cas il suffit de poser

$$\gamma+1=N,\quad \mu=\frac{q}{p}\ (p>0,\ q>0,\ p+q=1),\ C=q^N N!.$$

Le poids $\rho(x_i)$ ne sera non nul, dans ces conditions, que si $0\leqslant i\leqslant N$. Pour les quantités $\rho(x_i)$ on obtiendra la *distribution binomiale* bien connue de la théorie des probabilités:

$$\rho(x_i)=C_N^i p^i q^{N-i},\quad C_N^i=\frac{N!}{i!\,(N-i)!}.$$

Les polynômes correspondants sont dits *polynômes de Kravtchouk*.

Plaçons-nous dans le troisième cas et posons $C = e^{-\mu}$; les valeurs de $\rho(x_i)$ obéissent à la *distribution de Poisson*

$$\rho(x_i) = \frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}.$$

Les polynômes orthogonaux d'une variable discrète correspondants s'appellent *polynômes de Charlier.*

3) Le cas $\sigma = 1$ est sans intérêt, car il ne promet aucun type nouveau de polynômes.

Dans [1] on trouve des renseignements plus détaillés concernant les polynômes d'une variable discrète examinés.

Formules fondamentales

Quelques propriétés générales des polynômes orthogonaux

Expression explicite pour le polynôme $p_n(x)$ orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle (a, b):

$$p_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 \dots C_n \\ C_1 & C_2 \dots C_{n+1} \\ \dots & \dots \\ C_{n-1} & C_n \dots C_{2n-1} \\ 1 & x \dots x^n \end{vmatrix},$$

$C_n = \int_a^b x^n \rho(x)\,dx$ est le moment de la fonction de poids, A_n la constante de normalisation.

Relation de récurrence:

$$xp_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} p_{n-1}(x),$$

$d_n^2 = \int_a^b p_n^2(x)\rho(x)\,dx$, a_n et b_n sont les coefficients des puissances supérieures du polynôme $p_n(x)$:

$$p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$$

Formule de Darboux-Christoffel:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)\,p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)\,p_n(y) - p_n(x)\,p_{n+1}(y)}{x-y}.$$

Polynômes orthogonaux classiques

Caractéristiques principales des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, de Laguerre $L_n^{\alpha}(x)$ et d'Hermite $H_n(x)$ (tableau 2).

Equation différentielle pour le poids:

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)\rho(x)] = \tau(x)\rho(x).$$

Tableau 2

$p_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,(\alpha>-1,\ \beta>-1)$	$L_n^{\alpha}(x)\,(\alpha>-1)$	$H_n(x)$
(a, b)	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\rho(x)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$x^{\alpha}e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$1+\alpha-x$	$-2x$
λ_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	n	$2n$

Equation différentielle pour $p_n(x)$:

$$\sigma(x)y''+\tau(x)y'+\lambda_n y=0,$$
$$[\sigma(x)\rho(x)y']'+\lambda_n\rho(x)y=0.$$

Formules de dérivation:

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x);$$
$$\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x);$$
$$\frac{d}{dx}H_n(x)=2nH_{n-1}(x).$$

Le tableau 3 ci-contre contient les constantes principales pour les polynômes orthogonaux classiques.

Formule de Rodrigues:

$$p_n(x)=\frac{A_n}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)] \text{ (forme différentielle)};$$
$$p_n(x)=\frac{A_n}{\rho(x)}\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-x)^{n+1}}dz \text{ (forme intégrale)},$$

C est un contour fermé entourant le point $z=x$.

Relations de récurrence:

$$xp_n(x)=\alpha_n p_{n+1}(x)+\beta_n p_n(x)+\gamma_n p_{n-1}(x);$$
$$\sigma(x)p_n'(x)=\alpha_n^{(1)}p_{n+1}(x)+(\beta_n^{(1)}+\gamma_n^{(1)}x)p_n(x);$$
$$p_n(x)=\alpha_n^{(2)}p_{n+1}'(x)+(\beta_n^{(2)}+\gamma_n^{(2)}x)p_n'(x).$$

Représentations asymptotiques pour $n\to\infty$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\frac{\cos\{[n+(\alpha+\beta+1)/2]\theta-(2\alpha+1)\pi/4\}}{\sqrt{\pi n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}}+O(n^{-3/2})$$
$$(0<\delta\leqslant\varphi\leqslant\pi-\delta);$$

$$L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{x/2}x^{-\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}\cos\left[2\sqrt{nx}-(2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right]+$$
$$+O(n^{\alpha/2-1/2})\qquad(0<\delta\leqslant x\leqslant N<\infty);$$

$$H_n(x)=\sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2}e^{x^2/2}\left[\cos\left(\sqrt{2}nx-\frac{\pi n}{2}\right)+O(n^{-1/4})\right]$$
$$(|x|\leqslant N<\infty).$$

Tableau 3

$p_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$L_n^{\alpha}(x)$	$H_n(x)$
A_n	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$\frac{1}{n!}$	$(-1)^n$
a_n	$\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	2^n
b_n	$\frac{(\alpha-\beta)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n(n-1)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$(-1)^{n-1}\frac{n+\alpha}{(n-1)!}$	0
d_n^2	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n!\sqrt{\pi}$
α_n	$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$-(n+1)$	$\frac{1}{2}$
β_n	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$2n+\alpha+1$	0
γ_n	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$	$-(n+\alpha)$	n
$\alpha_n^{(1)}$	$-\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$	$n+1$	-1
$\beta_n^{(1)}$	$\frac{(\alpha-\beta)(n+\alpha+\beta+1)}{2n+\alpha+\beta+2}$	$-(n+\alpha+1)$	0
$\gamma_n^{(1)}$	$n+\alpha+\beta+1$	1	2
$\alpha_n^{(2)}$	$\frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}$	-1	$\frac{1}{2(n+1)}$
$\beta_n^{(2)}$	$\frac{\alpha-\beta}{(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	1	0
$\gamma_n^{(2)}$	$-\frac{1}{n+\alpha+\beta+1}$	0	0

Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont orthogonaux par rapport au poids $\rho(x) = 1$ sur l'intervalle $(-1, 1)$. Ils représentent un cas particulier des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ pour $\alpha = \beta = 0$ et des polynômes de Gegenbauer $C_n^{\nu}(x)$ pour $\nu = {}^1/_2$.

Equation différentielle:

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0,\quad y = P_n(x).$$

Formule de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n.$$

Représentation intégrale:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \sin\varphi)^n \, d\varphi.$$

Fonction génératrice:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

Valeurs particulières:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}, \quad |P_n(x)| < 1.$$

Carré de la norme:

$$d_n^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Relations de récurrence:

$$(1-x^2) P_n'(x) = -(n+1)[P_{n+1}(x) - xP_n(x)],$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n+1}[P_{n+1}'(x) - xP_n'(x)] = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)],$$

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Représentation asymptotique:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\theta}} + O(n^{-3/2}).$$

On voit sur la figure 3 les courbes représentatives des polynômes de Legendre $P_n(x)$ pour quelques valeurs de n.

Quelques fonctions spéciales apparentées aux fonctions de deuxième espèce $Q_0(z)$ pour les polynômes orthogonaux classiques

Fonction gamma incomplète:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} \, dt.$$

Fonction bêta incomplète:

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} \, dt.$$

Exponentielle intégrale:

$$E_m(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zs}}{s^m} \, ds, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Sinus intégral et cosinus intégral :

$$\mathrm{Si}(z)=\int_0^z \frac{\sin s}{s}\,ds,\quad \mathrm{Ci}(z)=\int_\infty^z \frac{\cos s}{s}\,ds.$$

Intégrale de probabilité (fonction des erreurs) :

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-s^2}\,ds.$$

Intégrales de Fresnel :

$$S(z)=\int_0^z \sin\frac{\pi s^2}{2}\,ds,\quad C(z)=\int_0^z \cos\frac{\pi s^2}{2}\,ds.$$

Les propriétés principales de ces fonctions et leur liaison avec la fonction $Q_0(z)$ ont été examinées au § 11.

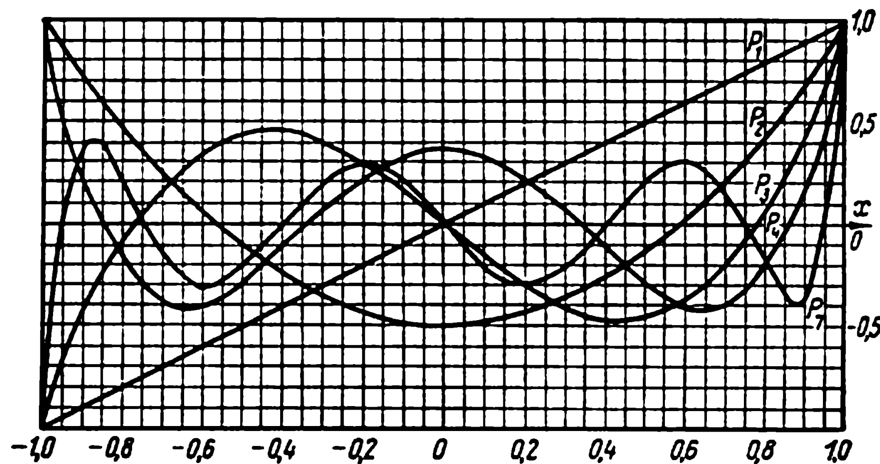


Fig. 3

Fonctions sphériques

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\Theta_{lm}(\cos\theta)\quad(-l\leqslant m\leqslant l);$$

$$\Theta_{lm}(x)=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(1-x^2)^l=$$

$$=\frac{(-1)^{l-m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}(1-x^2)^{-m/2}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(1-x^2)^l;$$

$$\Theta_{l,-m}(x)=(-1)^m\Theta_{lm}(x);\quad Y^*_{lm}(\theta,\varphi)=(-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\varphi).$$

Propriété d'orthogonalité :

$$\int Y_{lm}(\theta,\varphi)\,Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\,d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Relation de récurrence:

$$\cos\theta Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{4(l+1)^2-1}}\,Y_{l+1,m}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{l^2-m^2}{4l^2-1}}\,Y_{l-1,m}(\theta,\varphi).$$

Formules de dérivation:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{lm}(\theta,\varphi)=imY_{lm}(\theta,\varphi);$$

$$e^{\pm i\varphi}\left(\mp\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}+m\operatorname{cotg}\theta Y_{lm}\right)=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\,Y_{l,m\pm1}$$

(quand $m=\pm(l+1)$, on posera $Y_{lm}(\theta,\varphi)=0$).

Théorème d'addition:

$$P_l(\cos\omega)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\,Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2)$$

(ω est l'angle formé par les vecteurs r_1 et r_2 dont les directions sont caractérisées par les angles θ_1, φ_1 et θ_2, φ_2);

$$\frac{1}{|r_1-r_2|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\omega)=$$

$$=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\,Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2)\right],$$

$$r_<=\min(r_1,r_2),\quad r_>=\max(r_1,r_2).$$

Equations différentielles du type hypergéométrique

Equation du type hypergéométrique:

$$\sigma(z)\,y''+\tau(z)\,y'+\lambda y=0,$$

où $\sigma(z)$ et $\tau(z)$ sont des polynômes arbitraires de degrés non supérieurs à 2 et à 1, λ est un nombre complexe quelconque.

Forme canonique des équations du type hypergéométrique:

équation hypergéométrique:

$$z(1-z)\,y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\,z]\,y'-\alpha\beta y=0;$$

équation hypergéométrique dégénérée:

$$zy''+(\gamma-z)\,y'-\alpha y=0;$$

équation pour la fonction d'Hermite:

$$y''-2zy'+2\nu y=0.$$

Solutions particulières de l'équation du type hypergéométrique:

$$y_\nu(z)=\frac{1}{\rho(z)}\int_C\frac{\sigma^\nu(\xi)\,\rho(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}}\,d\xi.$$

Ici la fonction $\rho(z)$ satisfait à l'équation $[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z)$, la constante ν est racine de l'équation $\lambda + \nu\left[\tau'(z) + \frac{1}{2}(\nu-1)\sigma''(z)\right] = 0$, le contour C est choisi de la condition

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(\xi)\,\rho(\xi)}{(\xi-z)^{\nu+1}}\right|_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les extrémités du contour}).$$

Equation généralisée du type hypergéométrique:

$$\sigma(z)\,u'' + \widetilde{\tau}(z)\,u' + \frac{\widetilde{\sigma}(z)}{\sigma(z)}\,u = 0,$$

où $\sigma(z)$ et $\widetilde{\sigma}(z)$ sont des polynômes arbitraires de degré 2 au plus, $\widetilde{\tau}(z)$ est un polynôme arbitraire de degré 1 au plus.

La méthode décrite au § 10, 2 permet de réduire l'équation généralisée du type hypergéométrique à l'équation du type hypergéométrique $\sigma(z)\,y'' + \tau(z)\,y' + \lambda y = 0$.

CHAPITRE III

FONCTIONS CYLINDRIQUES

Il ne serait pas exagéré de dire que les fonctions cylindriques sont les plus fréquemment employées de toutes les fonctions spéciales. La théorie de ces fonctions utilise la liaison existant entre les solutions de l'équation différentielle de Bessel et celles de l'équation du type hypergéométrique. Cela permet de déduire facilement la représentation intégrale de Poisson pour les fonctions cylindriques, qui est une généralisation de la formule de Rodrigues pour les polynômes orthogonaux classiques. En plus de la représentation de Poisson, nous étudierons la représentation intégrale de Sommerfeld, commode pour les applications, qui découle naturellement de la solution de l'équation de Helmholtz par la méthode de séparation des variables. De ces représentations on déduit sans peine les développements en séries, les représentations asymptotiques, les relations de récurrence et les théorèmes d'addition.

A la fin du chapitre, on examine quelques applications des fonctions cylindriques aux problèmes de physique mathématique et de mécanique quantique.

§ 18. Equation différentielle de Bessel et sa solution

1. Solution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques. Les problèmes caractéristiques amenant à des fonctions cylindriques sont les problèmes liés à la solution de l'*équation de Helmholtz*

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

en coordonnées cylindriques. Pour plus de simplicité, supposons que la fonction v ne dépend pas de la distance comptée suivant l'axe du cylindre. Alors $v = v(r, \varphi)$ et

$$\Delta v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0. \tag{1}$$

Pour que la fonction v soit uniforme, il faut qu'elle vérifie la condition de périodicité $v(r, \varphi + 2\pi) = v(r, \varphi)$. Développons cette fonction en série de Fourier

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(r) e^{in\varphi},$$

où

$$v_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi. \tag{2}$$

On obtient sans peine l'équation différentielle pour la fonction $v_n(r)$ en intégrant (1) sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ de poids $e^{-in\varphi}$ et en simplifiant le terme en $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$ au moyen d'une double intégration par parties. En vertu de la périodicité de la fonction $v(r, \varphi)$ en φ, les substitutions s'annulent, et nous avons l'équation différentielle suivante pour la fonction $u(z) = v_n(r)$ avec $z = \sqrt{\lambda} r$:

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - n^2) u = 0.$$

Par la suite, nous chercherons les solutions d'une équation de forme plus générale:

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2) u = 0. \tag{3}$$

Ici z est une variable complexe et ν un paramètre qui peut prendre n'importe quelles valeurs réelles ou complexes.

Les solutions arbitraires de l'équation (3) portent le nom de *fonctions cylindriques d'ordre* ν ou de *fonctions de Bessel*. Pour cette raison l'équation (3) est souvent appelée *équation de Bessel*.

Par changement de variables, on obtient facilement de l'équation de Bessel plusieurs autres équations différentielles dont les solutions peuvent s'exprimer au moyen des fonctions cylindriques. C'est ainsi qu'en supposant

$$v = \xi^\alpha u, \quad z = \beta \xi^\gamma,$$

où ξ est une nouvelle variable indépendante, v une nouvelle fonction, α, β, γ des constantes, nous passons de l'équation de Bessel pour $u(z)$ à l'*équation différentielle de Lommel*

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{\xi} v' + \left[(\beta\gamma\xi^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{\xi^2} \right] v = 0 \tag{4}$$

que l'on rencontre fréquemment dans les applications. Il est évident que la solution de l'équation (4) se présente sous la forme

$$v(\xi) = \xi^\alpha Z_\nu(\beta\xi^\gamma), \tag{5}$$

où $Z_\nu(z)$ est une fonction cylindrique.

2. Définition des fonctions de Bessel de première espèce et des fonctions de Hankel. Pour construire une solution particulière de (3) posons d'abord que $z > 0$. L'équation (3) est une équation généralisée du type hypergéométrique. On la ramène à une équation du type hypergéométrique en faisant le changement de variable $y(z) = \varphi(z) u(z)$. Pour rechercher la fonction $\varphi(z)$, utilisons la méthode du § 10. Dans notre cas

$$\sigma(z) = z, \quad \tilde{\tau}(z) = 1,$$

$$\tilde{\sigma}(z) = z^2 - \nu^2.$$

Les valeurs possibles de k sont $k = 2i\nu$ et $k = -2i\nu$. Dans le premier cas $\tau(z) = 1 \pm 2iz \pm 2\nu$, dans le deuxième $\tau(z) = 1 \pm \pm 2iz \mp 2\nu$. Pour obtenir la solution particulière de l'équation (3), il suffit de choisir une des formes possibles de $\tau(z)$. Soit par exemple $\tau(z) = 2iz + 2\nu + 1$. Cela entraîne

$$\pi_1(z) = -iz - \nu, \quad k = 2i\nu, \quad \lambda = i(2\nu + 1),$$
$$\rho(z) = e^{2iz}z^{2\nu}, \quad \varphi(z) = e^{-iz}z^{-\nu}.$$

La fonction $y(z)$ vérifie l'équation du type hypergéométrique

$$zy'' + (2iz + 2\nu + 1)\,y' + i\,(2\nu + 1)\,y = 0.$$

Conformément à la formule (18) du § 10, cherchons les solutions particulières de cette équation sous la forme

$$y(z) = a_\nu z^{-2\nu} e^{-2iz} \int\limits_C \frac{s^{\nu-1/2}e^{2is}}{(z-s)^{-\nu+1/2}}\,ds,$$

où a_ν est une constante de normalisation et le contour C est choisi de telle façon que l'expression $s^{\nu+1/2}(z-s)^{\nu-1/2}e^{2is}$ s'annule à ses extrémités.

Soit $\operatorname{Re}\nu > 1/2$. On peut choisir alors comme extrémités du contour les points $s_1 = 0$, $s_2 = z$. En outre, le contour C peut s'éloigner à l'infini de sorte que $\operatorname{Im} s \to \infty$. La fonction $u(z) = u_\nu(z)$ aura pour expression

$$u_\nu(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_C [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\,ds.$$

Pour le contour C prenons les contours C_0, C_1, C_2 représentés sur la figure 4. On est donc amené aux trois solutions suivantes de l'équation de Bessel:

$$u_\nu^{(0)}(z) = a_\nu z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_{C_0} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\,ds, \tag{6}$$

$$u_\nu^{(1)}(z) = a_\nu^{(1)} z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_{C_1} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\,ds, \tag{7}$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = a_\nu^{(2)} z^{-\nu} e^{-iz} \int\limits_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\,ds. \tag{8}$$

Pour choisir la branche de la fonction $[s(z-s)]^{\nu-1/2}$ d'une façon univoque, posons $|\arg s(z-s)| < \pi$. Simplifions les expressions (6) à (8) en posant dans (6) $s = \frac{z}{2}(1+t)$, dans (8) $s = \frac{it}{2}$, dans

(7) $s = z + \frac{it}{2}$. Il en résulte

$$u_\nu^{(0)}(z) = \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{izt}\,dt =$$

$$= \frac{a_\nu}{2^{2\nu}} z^\nu \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos zt\,dt, \qquad (9)$$

$$u_\nu^{(1)}(z) = -\frac{a_\nu^{(1)}}{2^\nu} e^{-\frac{i\pi}{2}(\nu+1/2)} \frac{e^{iz}}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt, \qquad (10)$$

$$u_\nu^{(2)}(z) = \frac{a_\nu^{(2)}}{2^\nu} e^{\frac{i\pi}{2}(\nu+1/2)} \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt. \qquad (11)$$

Conformément à la condition ci-dessus $|\arg s(z-s)| < \pi$, nous prenons dans les formules (10) et (11) $\arg\left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)$ le plus petit en module.

Si l'on prend des constantes de normalisation réelles et que $a_\nu^{(1)} = -a_\nu^{(2)}$, on verra de (10) et (11) que, pour des z réels, les fonctions

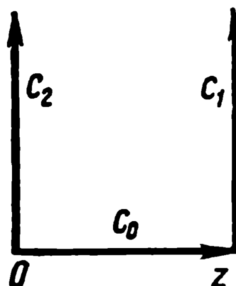


Fig. 4

$u_\nu^{(1)}(z)$ et $u_\nu^{(2)}(z)$ seront conjuguées complexes. Il est commode d'introduire une fonction prenant des valeurs réelles pour des z réels:

$$u_\nu(z) = \frac{1}{2}\left[u_\nu^{(1)}(z) + u_\nu^{(2)}(z)\right]. \qquad (12)$$

Il est facile de montrer que cette fonction coïncidera avec $u_\nu^{(0)}(z)$ si l'on pose

$$-a_\nu^{(1)} = a_\nu^{(2)} = 2a_\nu. \qquad (13)$$

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy au contour qui est composé des contours C_0, C_1 et C_2. Fermant ce contour à l'infini, on a en vertu du théorème de Cauchy

$$-\int_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\,ds + \int_{C_0} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\,ds +$$

$$+\int_{C_2} [s(z-s)]^{\nu-1/2} e^{2is}\,ds = 0 \qquad (14)$$

(l'intégrale prise le long de la partie du contour éloignée à l'infini s'annule). Compte tenu de (13) et de (6) à (8), la relation (14) entraîne l'égalité

$$u_\nu^{(0)}(z)=\frac{1}{2}\left[u_\nu^{(1)}(z)+u_\nu^{(2)}(z)\right].$$

La fonction $u_\nu^{(0)}(z)$, convenablement normalisée, porte le nom de *fonction de Bessel de première espèce* et est désignée par $J_\nu(z)$, tandis que les fonctions $u_\nu^{(1)}(z)$ et $u_\nu^{(2)}(z)$ sont appelées *fonctions de Hankel de première et de seconde espèce* et sont désignées par $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$.

Nous avons donc pour z réel trois solutions de l'équation de Bessel:

$$J_\nu(z)=\frac{a_\nu}{2^{2\nu}}z^\nu\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos zt\,dt; \tag{15}$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{a_\nu}{2^\nu}\sqrt{\frac{2}{z}}\,e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt; \tag{16}$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{a_\nu}{2^\nu}\sqrt{\frac{2}{z}}\,e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt, \tag{17}$$

avec

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)\right]. \tag{18}$$

Lorsque $\mathrm{Re}_\nu\geqslant 0$, la fonction $J_\nu(z)$ sera bornée si $z\to 0$. En appliquant à l'équation de Bessel mise sous la forme

$$(zu')'+\left(z-\frac{\nu^2}{z}\right)u=0$$

le corollaire du théorème 4 du § 1 pour $m=\nu$, $k(z)=z$, $u_1(z)=J_\nu(z)$, il est facile de se convaincre que la deuxième solution linéairement indépendante se comporte pour $z\to 0$ comme $z^{-\nu}$ si $\nu\neq 0$, ou bien comme $\ln z$ si $\nu=0$.

La fonction de Bessel $J_\nu(z)$ est introduite pour $\mathrm{Re}\,\nu>0$ comme solution particulière de l'équation (3) bornée pour $z\to 0$. Les fonctions de Hankel $H_\nu^{(1,2)}(z)$ sont commodes pour les applications en raison de leur comportement asymptotique simple pour $z\to\infty$.

§ 19. Propriétés fondamentales des fonctions cylindriques

Dans ce paragraphe, on étudie le prolongement analytique des fonctions $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ pour des valeurs arbitraires de z et de ν ainsi que les propriétés élémentaires de ces fonctions.

1. Développement en série de la fonction de Bessel. La manière la plus aisée d'obtenir le prolongement analytique de la fonction $J_\nu(z)$ consiste à développer celle-ci en série suivant les puissances de

z. A cet effet, développons en série $\cos zt$ dans la formule (15) du § 18:

$$J_\nu(z)=\frac{a_\nu}{2^{2\nu}}z^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2k}\,dt$$

(la légitimité de l'inversion de l'ordre de sommation et d'intégration est facile à démontrer). On a

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2k}\,dt=2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}t^{2k}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{1}(1-t)^{\nu-1/2}t^{k-1/2}\,dt=\frac{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(\nu+k+1)}=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}\,(2k)!}{2^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Nous avons utilisé les formules (4), (5) et (9) du § 2. Aussi,

$$J_\nu(z)=\frac{a_\nu}{2^\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Afin de simplifier au maximum la forme de la série pour $J_\nu(z)$, choisissons la constante de normalisation a_ν de la condition

$$\frac{a_\nu}{2^\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)=1. \tag{1}$$

Il en résulte

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{2}$$

Supposons maintenant que la variable complexe z appartient au plan comportant une coupure $(-\infty, 0)$, c.-à-d. $|\arg z|<\pi$. Cette restriction est nécessaire pour rendre la fonction z^ν uniforme pour un ν non entier. Montrons que la série (2) converge uniformément par rapport à z et à ν dans le domaine $0<\delta\leqslant|z|\leqslant R$, $|\nu|\leqslant N$, où R et N sont des nombres élevés fixés quelconques. Pour la démonstration, il suffit d'utiliser le théorème 3 du § 1 et l'estimation suivante de la relation de deux termes voisins de la série:

$$\left|\frac{u_k(z)}{u_{k-1}(z)}\right|=\frac{|z|^2}{4k\,|k+\nu|}\leqslant\frac{R^2}{4k\,(k-N)}\leqslant\frac{1}{4}$$

pour $k\geqslant\max(R^2, N+1)$. Puisque les termes de la série sont des fonctions analytiques des variables z et ν dans le domaine

$\delta \leqslant |z| \leqslant R$, $|\arg z| < \pi$, $|\nu| \leqslant N$, la fonction $J_\nu(z)$ définie par la série (2) sera une fonction analytique des variables z et ν dans le domaine indiqué et, en vertu du corollaire du théorème 2 du § 1, vérifiera l'équation de Bessel.

2. Etude des propriétés analytiques de la représentation intégrale de Poisson pour les fonctions cylindriques. Considérons le prolongement analytique des relations (15) à (17) du § 18. En y portant l'expression pour a_ν de (1), mettons ces relations sous la forme suivante:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + {}^1/_2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu - 1/2} \cos zt\, dt, \tag{3}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \frac{e^{i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)}}{\Gamma(\nu + {}^1/_2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu - 1/2} \left(1 + \frac{it}{2z}\right)^{\nu - 1/2} dt, \tag{4}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \frac{e^{-i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)}}{\Gamma(\nu + {}^1/_2)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu - 1/2} \left(1 - \frac{it}{2z}\right)^{\nu - 1/2} dt. \tag{5}$$

Les représentations intégrales obtenues des fonctions cylindriques sont connues sous le nom de *représentations intégrales de Poisson.*

Pour $J_\nu(z)$, l'intégrale converge uniformément par rapport à z et à ν quand $-1/2 + \delta \leqslant \operatorname{Re}\nu \leqslant N$, $|z| \leqslant R$ (δ, N, R sont des nombres positifs quelconques). Pour cette raison l'intégrale dans (3) sera une fonction analytique pour $\operatorname{Re}\nu > -1/2$; la relation (3) reste donc vraie, conformément au principe de prolongement analytique, lorsque $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re}\nu > -1/2$.

Les fonctions de Hankel $H_\nu^{(1,2)}(z)$ définies par les formules (4) et (5) ont été introduites pour des valeurs réelles de $z > 0$. A l'aide de ces formules et du principe de prolongement analytique, on arrive à donner aux fonctions de Hankel la définition pour des valeurs complexes de z, les seconds membres des formules restant des fonctions analytiques de la variable z. En cas de prolongement analytique, il sera toujours supposé que dans (4) et (5)

$$\left|\arg\left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)\right| \leqslant \pi. \tag{6}$$

Considérons d'abord la représentation intégrale pour $H_\nu^{(1)}(z)$. La fonction $\left(1 + \frac{it}{2z}\right)^{\nu - 1/2}$ admet les points de branchement quand z est tel que $1 + \frac{it}{2z} = 0$, c.-à-d. quand $z = -it/2$ $(0 < t < \infty)$. Aussi la ligne $\arg z = -\pi/2$ est-elle la ligne singulière de l'intégrale figurant dans (4). Si nous posons en outre, de la même façon que pour les fonctions de Bessel $J_\nu(z)$, que $|\arg z| < \pi$, il y a in-

térêt à étudier l'analyticité de la fonction $H_\nu^{(1)}(z)$ dans le domaine

$$-\frac{\pi}{2}+\delta\leqslant\arg z<\pi\ (\delta>0). \tag{7}$$

Montrons que dans le secteur considéré l'intégrale

$$I=\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt$$

converge uniformément par rapport à z et qu'elle est, par conséquent, une fonction analytique de cette variable (voir théorème 2 du § 1).

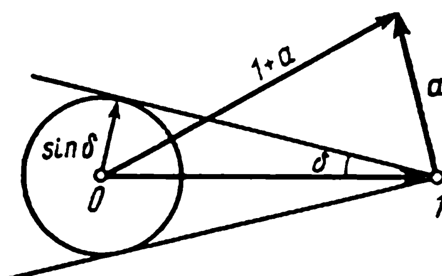


Fig. 5

Pour la démonstration, il faut utiliser l'estimation de l'expression $|(1+a)^b|$ pour des valeurs complexes arbitraires de a et b. Soit $0<C_1\leqslant|1+a|\leqslant C_2$, $|\arg(1+a)|\leqslant\pi$. Alors

$$|(1+a)^b|=|1+a|^{\operatorname{Re} b}e^{-\arg(1+a)\operatorname{Im} b}\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases} C_1^{\operatorname{Re} b}e^{\pi|\operatorname{Im} b|} & \text{si } \operatorname{Re} b<0;\\ C_2^{\operatorname{Re} b}e^{\pi|\operatorname{Im} b|} & \text{si } \operatorname{Re} b\geqslant 0.\end{cases} \tag{8}$$

La fonction $(1+a)^b$ admet une singularité quand $a=-1$. Pour s'en débarrasser, on suppose simplement que $|\arg a|\leqslant\pi-\delta$. On a alors, comme le montre la figure 5, l'estimation $|1+a|\geqslant\geqslant\sin\delta$. Pour $|\arg a|\leqslant\pi-\delta$, on peut donc poser

$$C_1=\sin\delta. \tag{9}$$

Pour obtenir C_2, il suffit de faire intervenir l'inégalité évidente $|1+a|\leqslant 1+|a|$. En vertu de (7)

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{it}{2z}\leqslant\pi-\delta,$$

c.-à-d. qu'on peut poser $C_1=\sin\delta$. D'autre part, lorsque $|z|\geqslant\geqslant r>0$, on a $\left|1+\frac{it}{2z}\right|\leqslant 1+\frac{t}{2r}$, c.-à-d. qu'on peut poser

$$C_2=1+\frac{t}{2r}. \tag{10}$$

Il découle donc de (8) et (6) que

$$\left|\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} e^{\pi\,|\operatorname{Im}\nu|}\left(1+\dfrac{t}{2r}\right)^{\operatorname{Re}\nu-1/2} & \text{si } \operatorname{Re}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0, \\ & |z|\geqslant r>0; \\ e^{\pi\,|\operatorname{Im}\nu|}(\sin\delta)^{\operatorname{Re}\nu-1/2} & \text{si } \operatorname{Re}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)<0. \end{cases} \tag{11}$$

On a ensuite

$$|I|=\left|\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt\right|\leqslant\int_0^\infty e^{-t}t^{\operatorname{Re}\nu-1/2}\left|\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}\right|dt.$$

Les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\operatorname{Re}\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2r}\right)^{\operatorname{Re}\nu-1/2}dt\left(\operatorname{Re}\nu\geqslant\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\operatorname{Re}\nu-1/2}\,dt\left(-\frac{1}{2}<\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\right)$$

sont évidemment convergentes, d'où la convergence uniforme de l'intégrale examinée. En outre, les estimations citées impliquent la convergence uniforme par rapport à ν des intégrales dans le domaine $0<\varepsilon<\operatorname{Re}(\nu+1/2)<C$, où C et ε sont des nombres positifs quelconques.

Pour cette raison la fonction $H_\nu^{(1)}(z)$ définie par la représentation intégrale (4) est analytique par rapport à z dans le domaine $-\pi/2<\arg z<\pi$, $|z|>0$, et par rapport à ν, dans le demi-plan $\operatorname{Re}(\nu+1/2)>0$ (voir le théorème 2 du § 1).

On démontre de la même façon l'analyticité de la fonction de Hankel de seconde espèce $H_\nu^{(2)}(z)$ définie par la formule (5) dans le domaine $|z|>0$, $-\pi<\arg z<\pi/2$, $\operatorname{Re}(\nu+1/2)>0$.

Pour prolonger analytiquement la fonction $H_\nu^{(1)}(z)$ au secteur du plan de la variable complexe z, dont on a fait abstraction, on doit utiliser le théorème de Cauchy et passer dans (4) de l'intégration suivant les valeurs positives de t à celle le long du rayon $\arg t=-\pi/2+\delta$. Alors la fonction $H_\nu^{(1)}(z)$ sera analytique pour $|\arg z|<\pi-\delta$. Il en est de même de la fonction $H_\nu^{(2)}(z)$. Ainsi donc, les fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$ sont des fonctions analytiques de z et de ν pour $|\arg z|<\pi$, $\operatorname{Re}\nu>-1/2$.

3. Représentations asymptotiques. Afin d'avoir le prolongement analytique des fonctions de Hankel $H_\nu^{(1,2)}(z)$ aux valeurs quelconques de ν, considérons d'abord les représentations asymptotiques de ces fonctions pour une valeur fixée de ν et pour $|z|\to\infty$.

Comme, pour toute valeur fixée de t, on a

$$\lim_{z\to\infty}\left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} = 1,$$

il est naturel de supposer que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2}\left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt \xrightarrow[z\to\infty]{} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} dt = \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right).$$

Montrons que pour des $|z|$ grands on a l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2}\left(1 \pm \frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt = \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{12}$$

Pour la démonstration, évaluons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2}\left[\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} - 1\right] dt.$$

On a

$$\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} - 1 = \left(1+\frac{is}{2z}\right)^{\nu-1/2}\Big|_0^t = \frac{i\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{2z}\int_0^t \left(1+\frac{is}{2z}\right)^{\nu-3/2} ds.$$

De l'inégalité (11) nous tirons l'estimation suivante:

$$\left|\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2} - 1\right| \leqslant \frac{\left|\nu-\frac{1}{2}\right| t}{2|z|} \max_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\left(1+\frac{is}{2z}\right)^{\nu-3/2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\nu-\frac{1}{2}\right| t}{2|z|} e^{\pi|\operatorname{Im}\nu|}\begin{cases}\left(1+\frac{t}{2r}\right)^{\operatorname{Re}\nu-3/2} & \text{si } \operatorname{Re}(\nu-3/2) \geqslant 0,\\ & |z| \geqslant r > 0;\\ (\sin\delta)^{\operatorname{Re}\nu-3/2} & \text{si } \operatorname{Re}(\nu-3/2) < 0.\end{cases}$$

Pour $\operatorname{Re}\nu > -1/2$ les intégrales $\int_0^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re}\nu+1/2}\left(1+\frac{t}{2r}\right)^{\operatorname{Re}\nu-3/2} dt$ et $\int_0^\infty e^{-t} t^{\operatorname{Re}\nu+1/2} dt$ convergent, ce qui démontre que l'égalité (12) est vraie. Portant (12) dans (4), nous obtenons la représentation asymptotique suivante de la fonction de Hankel $H_\nu^{(1)}(z)$ pour des $|z|$ grands:

$$\left.\begin{aligned} &H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right],\\ &-\frac{\pi}{2}+\delta \leqslant \arg z < \pi, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

On obtient les termes suivants de la représentation asymptotique en tenant compte des termes d'un plus haut ordre de petitesse par rapport à $1/z$ lors du développement de $\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}$ suivant la formule binomiale.

Nous venons de démontrer la validité du développement asymptotique pour le cas $-\pi/2+\delta \leqslant \arg z < \pi$. On retrouve le même résultat pour $-\pi+\delta \leqslant \arg z \leqslant -\pi/2+\delta$ en utilisant la remarque concernant le prolongement analytique de la fonction de Hankel $H_\nu^{(1)}(z)$ dans le secteur considéré. On constate finalement que la représentation asymptotique (13) a lieu pour $-\pi+\delta \leqslant \arg z < \pi$.

En ce qui concerne la fonction de Hankel $H_\nu^{(2)}(z)$, on cherche sa représentation asymptotique pour des $|z|$ grands de façon analogue:

$$\left.\begin{aligned} &H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right],\\ &-\pi<\arg z\leqslant\pi-\delta,\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

La représentation asymptotique de la fonction de Bessel $J_\nu(z)$ se déduit de (13) et de (14) en utilisant la relation (18) du § 18:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z+O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right],\quad \operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}. \tag{15}$$

On montrera dans la suite que les représentations asymptotiques (13) à (15) restent vraies quelle que soit la valeur de ν.

4. **Relations entre différentes fonctions cylindriques.** Le remplacement de ν par $-\nu$ ne modifie pas l'équation de Bessel. C'est pourquoi elle admet comme solutions, outre $J_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$, aussi les fonctions $J_{-\nu}(z)$, $H_{-\nu}^{(1)}(z)$ et $H_{-\nu}^{(2)}(z)$. Comme l'équation de Bessel n'a que deux solutions linéairement indépendantes, les fonctions indiquées doivent être liées entre elles par les relations linéaires. Comme on peut le voir du comportement asymptotique pour $z\to\infty$, les fonctions de Hankel $H_\nu^{(1)}(z)$ et $H_\nu^{(2)}(z)$ sont linéairement indépendantes quel que soit ν. Donc,

$$\left.\begin{aligned} H_{-\nu}^{(1)}(z)&=A_\nu H_\nu^{(1)}(z)+B_\nu H_\nu^{(2)}(z),\\ H_{-\nu}^{(2)}(z)&=C_\nu H_\nu^{(1)}(z)+D_\nu H_\nu^{(2)}(z)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(A_ν, B_ν, C_ν, D_ν sont des constantes).

Soit $|\operatorname{Re}\nu|<1/2$. Alors les fonctions de Hankel $H_{\pm\nu}^{(1,2)}(z)$ admettent les représentations asymptotiques (13) et (14). Egalant les représentations asymptotiques des premiers et des seconds membres des égalités (16), on obtient $B_\nu=C_\nu=0$, $A_\nu=e^{i\pi\nu}$, $D_\nu=$

$= e^{-i\pi\nu}$, c.-à-d. que

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}_{-\nu}(z) &= e^{i\pi\nu} H^{(1)}_{\nu}(z), \\ H^{(2)}_{-\nu}(z) &= e^{-i\pi\nu} H^{(2)}_{\nu}(z). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Les relations (17) permettent de prolonger analytiquement les fonctions $H^{(1)}_{\nu}(z)$ et $H^{(2)}_{\nu}(z)$ aux valeurs de ν satisfaisant à la condition $\mathrm{Re}\,\nu \leqslant -1/2$. Les fonctions $H^{(1,2)}_{\nu}(z)$ ainsi définies seront des fonctions analytiques de ν et de z pour $|\arg z| < \pi$ et pour toute valeur de ν, les représentations asymptotiques (13) à (15) restant vraies pour tout ν en vertu de (17) et de la relation (18) du § 18.

Il est évident que pour tout ν les fonctions $H^{(1)}_{\nu}(z)$ et $H^{(2)}_{\nu}(z)$ sont solutions de l'équation de Bessel. Cherchons la relation existant entre les fonctions $H^{(1)}_{\nu}(z)$, $H^{(2)}_{\nu}(z)$ et les fonctions $J_{\nu}(z)$, $J_{-\nu}(z)$. Puisque l'égalité (18) du § 18 reste en vigueur selon le principe de prolongement analytique pour tout ν, on a

$$\left.\begin{aligned} J_{\nu}(z) &= \frac{1}{2}[H^{(1)}_{\nu}(z) + H^{(2)}_{\nu}(z)], \\ J_{-\nu}(z) &= \frac{1}{2}[H^{(1)}_{-\nu}(z) + H^{(2)}_{-\nu}(z)]. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Utilisant les égalités (17), on aboutit aux relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}_{\nu}(z) &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu} J_{\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}, \\ H^{(2)}_{\nu}(z) &= \frac{e^{i\pi\nu} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \pi\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Les relations (19) deviennent indéterminées pour $\nu = n$ (n est un entier). Comme les fonctions $H^{(1,2)}_{\nu}(z)$ sont des fonctions analytiques de ν, la relation

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \qquad (20)$$

doit être vérifiée pour que la limite dans (19) soit finie quand $\nu \to n$.

On a montré donc que les fonctions $J_{\nu}(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont linéairement dépendantes quand $\nu = n$. Au contraire, lorsque $\nu \neq n$, ces fonctions seront linéairement indépendantes, car leur comportement pour $z \to 0$ est différent:

$$J_{\nu}(z) \approx \frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}, \quad J_{-\nu}(z) \approx \frac{(z/2)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}.$$

Il s'ensuit que la solution générale de l'équation de Bessel pour $\nu \neq n$ s'écrit comme suit:

$$u(z) = C_1 J_{\nu}(z) + C_2 J_{-\nu}(z).$$

5. Développement des fonctions de Hankel en séries. A l'aide de (2) et de (19), on peut obtenir les développements en séries suivant

les puissances de z pour les fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$. Ces développements s'obtiennent aisément pour $\nu \neq n$. Nous étudions donc le cas $\nu = n$. Les valeurs $\nu = \pm n$ dans les seconds membres des relations (19) sont des points singuliers éliminables. Passant à la limite pour $\nu \to n$ et calculant les limites d'après la règle de L'Hospital, on a

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left[a_n(z) + (-1)^n a_{-n}(z)\right], \tag{21}$$

où

$$a_\nu(z) = \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}$$

(le signe plus correspond à $H_n^{(1)}(z)$).

Puisque la série pour $J_\nu(z)$ est une série uniformément convergente formée de fonctions analytiques de la variable ν, on peut, pour calculer $a_\nu(z)$, dériver terme à terme la série pour $J_\nu(z)$ d'après le théorème 3 du § 1. Il vient alors

$$a_\nu(z) = J_\nu(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\psi(k+\nu+1),$$

où $\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de la fonction gamma. Comme on a

$$\frac{\psi(z)}{\Gamma(z)} \xrightarrow[z\to -n]{} (-1)^{n+1} n!,$$

ce qui résulte des développements (2) du § 2 et (8) du § 3, il vient

$$(-1)^n a_{-n}(z) = (-1)^n J_{-n}(z)\ln\frac{z}{2} -$$
$$-(-1)^n\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}}{k!}(-1)^{n-k}(n-k-1)! +\right.$$
$$\left.+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{-n+2k}\,\psi(k-n+1)}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\right\} =$$
$$= J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+1)!}\psi(k+1).$$

Aussi

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm \frac{i}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} -\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\right\}. \tag{22}$$

Pour $n = 0$, on admet que la première des sommes s'annule. Les valeurs de $\psi(x)$ pour des x entiers se calculent par la formule (5) du § 3.

Comme il découle des formules (19) et (22), les fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$ ont pour $z = 0$ une singularité du type puissance de forme $z^{\pm\nu}$ si $\mathrm{Re}\,\nu \neq 0$, et du type logarithmique si $\nu = 0$.

6. Fonctions de Bessel de seconde espèce. On est souvent amené en pratique à chercher les solutions de l'équation de Bessel pour des ν réels et des z positifs. Dans ces cas les fonctions de Hankel s'avèrent parfois d'un emploi malaisé, puisqu'elles prennent des valeurs complexes. On a alors $H_\nu^{(2)}(z) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)}$ (la barre désignant la conjuguée complexe) et

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)] = \mathrm{Re}\,H_\nu^{(1)}(z).$$

Il est donc naturel de prendre $\mathrm{Im}\,H_\nu^{(1)}(z)$ pour seconde solution réelle linéairement indépendante de l'équation de Bessel, c.-à-d. la fonction

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)]. \tag{23}$$

La fonction $Y_\nu(z)$ est dite *fonction de Bessel de seconde espèce* *).

La fonction $Y_\nu(z)$ définie par l'égalité (23) peut être considérée pour toute valeur complexe de ν et de z. Elle sera la fonction analytique de ν dans tout le plan complexe, y compris $\nu = n$, et la fonction analytique de z pour $z \neq 0$.

Citons les propriétés fondamentales de la fonction $Y_\nu(z)$ qui découlent des propriétés correspondantes des fonctions de Hankel.

a) *Expression de $Y_\nu(z)$ au moyen de $J_\nu(z)$ et de $J_{-\nu}(z)$:*

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos\pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \quad (\nu \neq n).$$

b) *Développement de $Y_\nu(z)$ en série pour $\nu = n$* (voir (22)) :

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]\right\}.$$

c) *Comportement asymptotique de $Y_\nu(z)$ pour $z \to \infty$:*

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z + O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right].$$

*) On l'appelle quelquefois *fonction de Weber* ou *fonction de Neumann* et on la désigne $N_\nu(z)$. Signalons que les fonctions de Hankel sont appelées aussi fonctions de Bessel de troisième espèce.

§ 20. Représentation intégrale de Sommerfeld et relations de récurrence pour les fonctions cylindriques

1. Représentation intégrale de Sommerfeld pour les fonctions cylindriques. Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions de l'équation de Bessel pour les fonctions $J_\nu(z)$ et $H_\nu^{(1, 2)}(z)$ il s'est avéré commode d'utiliser les représentations intégrales de Poisson.

Pour la fonction $J_n(z)$, il est aisé d'obtenir également la représentation intégrale d'une autre forme, en se basant sur les considérations suivantes. Comme il a été montré au § 18, la fonction

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

pour $z = \sqrt{\lambda} r$ est une fonction cylindrique d'ordre n si la fonction v satisfait à l'équation $\Delta v + \lambda v = 0$. Il est évident que la fonction $u_n(z)$ doit coïncider à un facteur constant près avec la fonction de Bessel $J_n(z)$ dans le cas où $v(r, \varphi)$ est bornée pour $r \to 0$. La solution bornée la plus simple de l'équation $\Delta v + \lambda v = 0$ pour $\lambda = k^2 > 0$ est une onde plane $v = e^{ikr}$, où k est le vecteur onde. Orientant l'axe des y dans la direction du vecteur onde k, on a

$$v(r, \varphi) = e^{ikr \sin \varphi}.$$

On aboutit alors à la représentation intégrale suivante de la fonction $J_n(z)$:

$$J_n(z) = \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi. \tag{1}$$

Ici a_n est une constante.

Il est possible d'obtenir les représentations intégrales analogues pour n'importe quelle fonction cylindrique d'ordre ν quelconque. Pour cela, il est naturel de chercher la solution de l'équation de Bessel pour ν quelconque sous la forme d'une intégrale de contour

$$u_\nu(z) = \int_C e^{iz \sin \varphi - i\nu\varphi} d\varphi. \tag{2}$$

Montrons que la fonction $u_\nu(z)$ vérifie bien l'équation de Bessel à condition que la substitution

$$e^{iz \sin \varphi - i\nu\varphi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

s'annule (φ_1 et φ_2 sont les extrémités du contour). Pour la démonstration, cherchons d'abord à établir la relation entre les fonctions

$u_\nu(z)$ et $u'_\nu(z)$. On a

$$u'_\nu(z) = \int_C e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi} i \sin\varphi \, d\varphi.$$

D'autre part, après avoir intégré la relation

$$\frac{d}{d\varphi} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi} = ie^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}(z\cos\varphi - \nu)$$

le long du contour C, on obtient

$$\frac{\nu}{z} u_\nu(z) = \int_C e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi} \cos\varphi \, d\varphi.$$

Après addition et soustraction terme à terme des expressions pour $u'_\nu(z)$ et $\frac{\nu}{z} u_\nu(z)$, il vient

$$\frac{\nu}{z} u_\nu(z) \pm u'_\nu(z) = \int_C e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi} e^{\pm i\varphi} \, d\varphi = u_{\nu\mp 1}(z). \tag{3}$$

On en tire sans peine l'équation différentielle pour $u_\nu(z)$. Conformément à (3), on a

$$\frac{\nu}{z} u_\nu(z) + u'_\nu(z) = u_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{\nu-1}{z} u_{\nu-1}(z) - u'_{\nu-1}(z) = u_\nu(z).$$

Eliminant $u_{\nu-1}(z)$, on s'assure aisément que la fonction $u_\nu(z)$ vérifie l'équation de Bessel.

2. Représentations intégrales de Sommerfeld pour les fonctions de Hankel et les fonctions de Bessel de première espèce. Pour le contour C, on peut prendre par exemple un contour dont les extrémités sont à l'infini, de sorte que

$$\mathrm{Re}\,(iz\sin\varphi - i\nu\varphi) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}|z|e^{i\theta}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) - i\nu\varphi\right] \xrightarrow[\varphi\to\infty]{} -\infty. \tag{4}$$

Ici $\theta = \arg z$.

Considérons le contour C représenté sur la figure 6 ($\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$). Cherchons les contraintes qu'on doit imposer à α et à β pour que les conditions aux extrémités du contour soient remplies.

Soient $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 \to +\infty$. Dans ce cas, on peut négliger dans (4) les quantités φ et $e^{i\varphi}$ en comparaison de $e^{-i\varphi}$. La condition imposée au contour prend la forme

$$\mathrm{Re}\, e^{i(\theta-\varphi)} \xrightarrow[\varphi_2\to+\infty]{} +\infty.$$

Elle est remplie si $\cos(\theta - \alpha) > 0$. On peut admettre que

$$\theta - \frac{\pi}{2} < \alpha < \theta + \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Soient maintenant $\varphi_1 = \beta$, $\varphi_2 \to -\infty$.

On obtient d'une façon analogue qu'il suffit d'exiger que l'inégalité $\cos(\theta + \beta) < 0$ soit vérifiée. Cette inégalité sera vérifiée si l'on pose $\beta = -\alpha \pm \pi$. Les contours correspondants seront désignés par C_+ et C_-.

On montre sans difficulté, à l'aide du théorème de Cauchy, que pour tout α vérifiant l'inégalité (5) la fonction $u_\nu(z)$ reste inchangée.

Puisque la fonction $u_\nu(z)$ vérifie l'équation de Bessel, on peut la mettre sous la forme

$$u_\nu(z) = C_\nu H_\nu^{(1)}(z) + D_\nu H_\nu^{(2)}(z). \tag{6}$$

Cherchons les coefficients C_ν et D_ν en nous basant sur le comportement asymptotique connu des fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$. Examinons

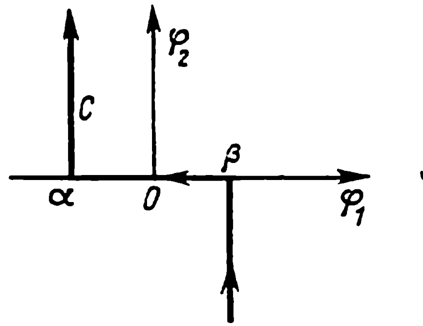


Fig. 6

d'abord le cas où l'on choisit C_+ en qualité de contour C. Soient $|z| \to \infty$ et $\arg z = \pi/2$. On peut alors choisir $\alpha = \beta = \pi/2$, c.-à-d. qu'on peut, dans l'expression pour $u_\nu(z)$, poser $\varphi = \pi/2 - i\psi$, où $-\infty < \psi < \infty$, ce qui donne

$$u_\nu(z) = ie^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|\operatorname{ch}\psi} e^{\nu\psi} d\psi = 2ie^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \int_0^{\infty} e^{-|z|\operatorname{ch}\psi} \operatorname{ch}\nu\psi \, d\psi.$$

Si $|z| \to \infty$, la fonction $e^{-|z|\operatorname{ch}\psi}$ passera par un maximum aigu pour $\psi = 0$ et décroîtra avec l'accroissement de ψ beaucoup plus vite que $\operatorname{ch}\nu\psi$ croîtra. C'est pourquoi

$$u_\nu(z) \approx 2ie^{-i\frac{\pi\nu}{2}} \int_0^{\infty} e^{-|z|\operatorname{ch}\psi} d\psi.$$

Par changement $|z| \operatorname{ch}\psi = |z| + t$, on ramène l'expression obtenue à la fonction $-\pi e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_0^{(1)}(z)$ (voir la formule (4) du § 19). Comparant les termes principaux de la représentation asymptotique du premier et du second membre de (6), on trouve $D_\nu = 0$, $C_\nu =$

$= -\pi$. De cette façon,

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_+} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\,d\varphi. \qquad (7)$$

D'une façon analogue on obtient pour le contour C_-

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_-} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\,d\varphi. \qquad (8)$$

D'où

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\,d\varphi, \qquad (9)$$

où le contour C_1 est représenté sur la figure 7. Lorsque $\nu = n$, en vertu de la périodicité de la fonction à intégrer, l'intégration le long du

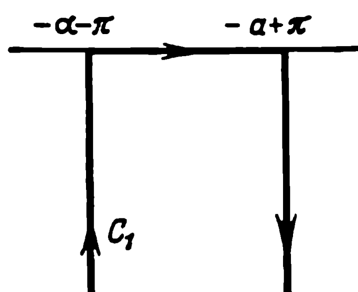


Fig. 7

contour C_1 se ramène à l'intégration sur l'intervalle $(-\alpha-\pi, -\alpha+\pi)$, ce qui coïncide avec (1) pour $\alpha = 0$, $a_n = 1$. On a ainsi

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\varphi - in\varphi}\,d\varphi,$$

c.-à-d. la fonction $J_n(z)$ est le coefficient du développement de la fonction $e^{iz\sin\varphi}$ en série de Fourier suivant les fonctions $e^{in\varphi}$. Aussi

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\,e^{in\varphi}. \qquad (10)$$

A l'aide du principe de prolongement analytique, on montre que la relation (10) reste vraie pour toute valeur complexe de φ.

Les représentations intégrales (7) à (9) sont appelées *représentations de Sommerfeld.*

3. Relations de récurrence. Nous venons de démontrer par ailleurs que les fonctions $H_\nu^{(1,2)}(z)$, $J_\nu(z)$ et $Y_\nu(z)$ satisfont aux relations de récurrence de la forme (3) qu'on peut récrire de la façon suivante:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^\nu u_\nu(z)] = z^{\nu-1}u_{\nu-1}(z),$$

$$-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}[z^{-\nu}u_\nu(z)] = z^{-(\nu+1)}u_{\nu+1}(z).$$

D'où

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^\nu u_\nu(z)]=z^{\nu-n}u_{\nu-n}(z),\\ \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^{-\nu}u_\nu(z)]=z^{-(\nu+n)}u_{\nu+n}(z).\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

En pratique, il est commode de se servir des corollaires évidents suivants des formules de récurrence (3):

$$\left.\begin{aligned}u_{\nu-1}(z)+u_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}u_\nu(z),\\ u_{\nu-1}(z)-u_{\nu+1}(z)=2u'_\nu(z).\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Le plus fréquent est le cas $\nu = n$. La première des relations (12) permet alors d'exprimer la fonction d'ordre quelconque n au moyen des fonctions d'ordre zéro et unité, ce qui facilite considérablement les calculs liés à la composition des tables des fonctions cylindriques. A l'aide de la seconde relation, on arrive à exprimer les dérivées des fonctions cylindriques au moyen des fonctions elles-mêmes.

§ 21. Fonctions de Bessel d'ordre demi-entier

Parmi les fonctions cylindriques, on distingue une classe spéciale des fonctions dont l'indice est égal à la moitié d'un nombre impair*). Cette classe est remarquable par le fait que les fonctions cylindriques de ce type peuvent être exprimées au moyen de fonctions élémentaires. Pour le démontrer, cherchons d'abord à exprimer les fonctions $H^{(1,2)}_{1/2}(z)$ au moyen des formules (4) et (5) du § 19:

$$H^{(1,2)}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\pm i\left(z-\frac{\pi}{2}\right)},$$

d'où

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\quad Y_{1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Ensuite, conformément aux relations fonctionnelles (17) du § 19, on a

$$H^{(1)}_{-1/2}(z)=e^{i\frac{\pi}{2}}H^{(1)}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz},$$

$$H^{(2)}_{-1/2}(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}}H^{(2)}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-iz}.$$

*) On rencontre de pareilles fonctions, par exemple, en cherchant à résoudre l'équation de Helmholtz par la méthode de séparation des variables en coordonnées sphériques.

D'où

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \qquad Y_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z.$$

Posons dans les formules (11) du § 20 $\nu=-1/2$. Il vient

$$H^{(1,2)}_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}, \tag{1}$$

$$J_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \cos z, \tag{2}$$

$$Y_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \sin z. \tag{3}$$

Le cas de l'indice demi-entier est l'unique cas où les fonction-cylindriques puissent être exprimées au moyen de fonctions élémens taires; c'est Liouville qui réussit à en donner la démonstration.

§ 22. Fonctions de Bessel à argument imaginaire

1. Définition des fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$. Nous avons considéré l'équation de Bessel

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)\,u = 0$$

pour des valeurs complexes de z. C'est le cas des z positifs qui revêt le plus d'importance pour des applications pratiques. Or, il y a quelquefois intérêt à chercher la solution de l'équation

$$z^2u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)\,u = 0 \tag{1}$$

pour $z > 0$, qu'on déduit de l'équation de Bessel en remplaçant z par iz. C'est pour cette raison que les classes spéciales des solutions de l'équation (1) sont appelées *fonctions de Bessel à argument imaginaire* ou *fonctions de Bessel modifiées.*

L'équation (1) admet évidemment comme solutions linéairement indépendantes les fonctions $J_\nu(iz)$ et $H^{(1)}_\nu(iz)$. La première de ces solutions est bornée pour $z \to 0$ si $\nu > 0$, et la seconde, pour $z \to \infty$. Il découle des représentations intégrales de Poisson (3) et (4) du § 19 que les fonctions

$$I_\nu(z)=e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}J_\nu(iz)=\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}\operatorname{ch} zs\,(1-s^2)^{\nu-1/2}\,ds, \tag{2}$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}e^{i\pi\frac{\nu+1}{2}}H^{(1)}_\nu(iz)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\,\frac{\int_0^\infty e^{-s}s^{\nu-1/2}\left(1+\frac{s}{2z}\right)^{\nu-1/2}ds}{\Gamma(\nu+1/2)} \tag{3}$$

seront solutions réelles linéairement indépendantes de l'équation (1) pour les valeurs réelles de $\nu > -1/2$ et de $z > 0$. La fonction $K_\nu(z)$ est appelée *fonction de Macdonald*.

2. Propriétés fondamentales des fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$. Mettons en évidence les propriétés fondamentales des fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ découlant de leurs rapports avec les fonctions $J_\nu(iz)$ et $H_\nu^{(1)}(iz)$.

1) *Développements en séries* (voir formules (2), (19) et (22) du § 19):

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}, \tag{4}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu} \qquad (\nu \neq n),$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} +$$

$$+ \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}\,[\psi(n+k+1) + \psi(k+1)]$$

(quand $n = 0$, on admet que la première somme s'annule).

On voit du développement de $I_\nu(z)$ que, pour $z > 0$ et $\nu > 0$, la fonction $I_\nu(z)$ est positive et croît monotonement avec l'accroissement de z.

2) *Relation entre les fonctions $K_\nu(z)$ et $K_{-\nu}(z)$, $I_n(z)$* et $I_{-n}(z)$ (voir les formules (17) et (20) du § 19):

$$\left.\begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z), \\ K_{-\nu}(z) &= K_\nu(z). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Utilisant les formules (4), (3) pour $\operatorname{Re}\nu > -1/2$ et (5), on arrive à définir les fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ pour toute valeur complexe de ν et pour toute valeur complexe de z, étant donné que $|\arg z| < \pi$. Elles seront alors des fonctions entières de ν; d'autre part, conformément au principe du prolongement analytique, les fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ satisferont à (1). De plus, la relation (2) reste vraie pour $\operatorname{Re}\nu > -1/2$.

3) *Comportement asymptotique pour $z \to +\infty$* (voir les formules (13) et (15) du § 19):

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

4) *Relations de récurrence* (voir la formule (12) du § 20):

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z),$$

en particulier,

$$I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z).$$

5) *Expression des fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ d'ordre demi-entier au moyen de fonctions élémentaires* (voir les formules (1) et (2) du § 21):

$$I_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{ch} z \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$K_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, z^n \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z} \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

6) *Représentation intégrale de Sommerfeld de $K_\nu(z)$ pour $z > 0$*:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} \psi + \nu\psi}\, d\psi = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} \psi} \operatorname{ch} \nu\psi\, d\psi. \tag{6}$$

Pour déduire la formule (6), nous avons posé dans la formule (7) du § 20 $\alpha = \pi/2$, $\varphi = \pi/2 + i\psi$, où $-\infty < \psi < \infty$. On voit de la représentation (6) que pour $z > 0$ et pour ν réels la fonction de Macdonald $K_\nu(z)$ est positive et décroît monotonement avec l'accroissement de z.

Effectuant dans (6), pour $z > 0$, le changement de variable $\frac{z}{2}e^{-\psi} = t$, on obtient une modification de la représentation intégrale de Sommerfeld de $K_\nu(z)$ fort intéressante du point de vue d'applications:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-t-\frac{z^2}{4t}}\, t^{-\nu-1}\, dt. \tag{7}$$

Selon le principe du prolongement analytique, la formule (7) reste vraie pour $\operatorname{Re} z^2 > 0$.

Remarque. Il découle des propriétés des fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ que l'intégrale générale de (1) pour $\nu > 0$, $z \geqslant 0$ prend la forme

$$u(z) = AI_\nu(z) + BK_\nu(z),$$

et ceci avec $B = 0$ si la fonction $u(z)$ est bornée pour $z = 0$; si la fonction $u(z)$ doit être bornée pour $z \to +\infty$, on a $A = 0$.

§ 23. Problèmes aux limites pour l'équation de Bessel. Développement des fonctions quelconques en séries et intégrales suivant les fonctions de Bessel

1. Problèmes aux limites typiques aboutissant aux fonctions cylindriques. Les fonctions cylindriques sont largement employées lors de la résolution des équations de la forme

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu=\Delta u$$

par la méthode de séparation des variables. Envisageons à titre d'exemple la solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$$

dans un cylindre illimité $r<r_0$ avec les conditions aux limites

$$\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_0}=0 \qquad (1)$$

et des conditions initiales quelconques indépendantes des distances mesurées le long de l'axe du cylindre (α et β sont des constantes arbitraires).

Introduisant les coordonnées cylindriques, il est naturel de supposer que $u=u(r, \varphi, t)$. Nous allons chercher la solution particulière du problème par la méthode de séparation des variables, en posant

$$u=T(t)\,R(r)\,\Phi(\varphi).$$

Portant cette expression dans l'équation

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

on obtient

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{1}{rR}(rR')'+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda.$$

Ici λ est une constante, étant donné que le premier membre de l'égalité est indépendant de r et φ, et le second, de t. L'équation par rapport à $T(t)$ donne

$$T(t)=e^{-\lambda a^2 t}.$$

On a ensuite

$$\frac{r}{R}(rR')'+\lambda r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu \qquad (\mu=\text{const}).$$

Résolvant l'équation par rapport à $\Phi(\varphi)$, on obtient

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\mu}\,\varphi+B\sin\sqrt{\mu}\,\varphi.$$

Puisque la fonction $u(r, \varphi, t)$ doit être uniforme en raison des considérations physiques, la fonction $\Phi(\varphi)$ doit satisfaire à la condition de périodicité

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

d'où $\mu = n^2$, où $n = 0, 1, \ldots$ C'est pourquoi la fonction $R(r)$ doit satisfaire à l'équation

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0, \tag{2}$$

qui représente un cas particulier de l'équation de Lommel (4) du § 18. Puisque, toujours en raison des considérations physiques, la fonction $u(r, \varphi, t)$ doit être bornée pour $r \leqslant r_0$ et, en particulier, pour $r \to 0$, on a

$$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}\, r)$$

à un facteur près. Conformément à (1), la fonction $R(r)$ doit satisfaire à la condition aux limites

$$[\alpha R(r) + \beta R'(r)]|_{r=r_0} = 0,$$

d'où l'on tire l'équation définissant les valeurs possibles de la constante λ:

$$\alpha J_n(z) + \gamma z J_n'(z) = 0. \tag{3}$$

Ici

$$z = \sqrt{\lambda} r_0, \qquad \gamma = \frac{\beta}{r_0}.$$

Puisque le premier membre de l'équation (3) est une fonction analytique de z, elle admet un ensemble dénombrable de racines

$$z_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm}}\, r_0 \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

toutes les racines étant isolées.

Comme il est montré dans les cours de physique mathématique, la solution générale du problème posé peut être représentée sous la forme de superposition des solutions particulières obtenues *), de sorte que

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_{nm} a^2 t} (A_{nm} \cos n\varphi + \\ + B_{nm} \sin n\varphi) J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}\, r_0).$$

Les constantes A_{nm} et B_{nm} sont définies des conditions initiales en faisant jouer les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres, propriétés qui seront déduites plus tard.

*) Voir par exemple [11].

2. Propriétés fondamentales des fonctions propres et des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville. Etudions de façon plus détaillée les propriétés des fonctions propres

$$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}\, r)$$

de l'équation (2). Beaucoup d'entre elles portent un caractère général et coïncident avec des propriétés analogues des fonctions propres satisfaisant, pour $a < x < b$, à l'équation

$$Ly + \lambda \rho y = 0 \tag{4}$$

et aux conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 y + \beta_0 y' |_{x=a} = 0, \\ \alpha y + \beta y' |_{x=b} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ici

$$Ly = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\, y.$$

Supposons que $k(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ sont des fonctions continues réelles, avec $k(x) > 0$ et $\rho(x) > 0$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, et que α_0, β_0, α, β sont des constantes réelles. Le problème lié à la recherche de toutes les valeurs propres de λ et des fonctions propres $y(x)$ porte le nom de *problème de Sturm-Liouville.*

Puisque l'équation et les conditions aux limites pour les fonctions propres sont homogènes, les fonctions propres se définissent à un facteur près. Il est commode de choisir la constante de normalisation de telle façon que la fonction $y(x)$ et sa dérivée à l'une des extrémités (disons pour $x = a$) prennent des valeurs données satisfaisant à une des conditions aux limites (5). On peut poser en particulier

$$y(a) = \beta_0, \quad y'(a) = -\alpha_0. \tag{6}$$

Du fait que l'équation (4) représente une équation différentielle du deuxième ordre, les données initiales (6) définissent la fonction $y(x)$ de façon univoque, quelle que soit la valeur donnée de λ. Désignons-la par $y_\lambda(x)$. Il est évident que $y_\lambda(x) \not\equiv 0$, car α_0 et β_0 ne peuvent s'annuler simultanément. En portant $y_\lambda(x)$ dans la condition aux limites pour $x = b$, on obtient l'équation permettant de déterminer les valeurs propres de λ.

Plus tard, nous aurons besoin d'une relation importante pour des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ quelconques:

$$\int_{x_1}^{x_2} (fLg - gLf)\, dx = k(x)\, W(f, g) \Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{7}$$

Ici $W(f, g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$ est le wronskien.

Posant dans (7) $f(x) = y_\lambda(x)$, $g(x) = y_\mu(x)$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, on a pour $\mu \neq \lambda$

$$\int_a^b (y_\lambda L y_\mu - y_\mu L y_\lambda)\,dx = k(x)\,W(y_\lambda, y_\mu)\,|_{x=b},$$

c.-à-d.

$$(\lambda - \mu)\int_a^b y_\lambda(x)\,y_\mu(x)\,\rho(x)\,dx = k(x)\,W(y_\lambda, y_\mu)\,|_{x=b}. \qquad (8)$$

Considérons quelques propriétés des fonctions propres et des valeurs propres.

1) *Les fonctions propres $y_1(x)$ et $y_2(x)$ correspondant à des valeurs propres différentes λ_1 et λ_2 sont orthogonales par rapport au poids $\rho(x)$, c.-à-d.*

$$\int_a^b y_1(x)\,y_2(x)\,\rho(x)\,dx = 0.$$

Pour le démontrer, il suffit de poser dans (8) $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \lambda_2$ et d'appliquer la relation $W(y_1, y_2)\,|_{x=b} = 0$ qui découle de la condition aux limites pour $x = b$.

On tire également de (8) une formule fort commode pour les applications et définissant l'intégrale de normalisation $\int_a^b y_\lambda^2(x)\,\rho(x)dx$.

On a

$$\int_a^b y_\lambda(x)\,y_\mu(x)\,\rho(x)\,dx = \frac{1}{\lambda-\mu}\,k(x)\,W(y_\lambda, y_\mu)\,|_{x=b}.$$

Faisant tendre dans cette égalité μ vers λ et utilisant la règle de L'Hospital pour lever l'indétermination, on obtient

$$\int_a^b y_\lambda^2(x)\,\rho(x)\,dx = k(x)\,W\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial \lambda}, y_\lambda\right)\Big|_{x=b}. \qquad (9)$$

2) *Les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville sont réelles.*

Soit en effet $y_\lambda(x)$ une fonction propre. Passant aux conjuguées complexes dans l'équation (4) et dans les conditions aux limites (5), on s'assure aisément que la fonction $y_\lambda^*(x)$ est la fonction propre du problème de Sturm-Liouville, correspondant à la valeur propre λ^*. Admettant que $\lambda \neq \lambda^*$, on aura en vertu de la propriété 1) notée

ci-dessus :

$$\int_a^b |y_\lambda(x)|^2 \rho(x)\,dx = 0,$$

ce qui est impossible, vu que $y_\lambda(x) \not\equiv 0$, $\rho(x) > 0$.

3) *L'équation* $(\alpha y_\lambda + \beta y'_\lambda)|_{x=b} = 0$ *pour les valeurs propres de* λ *n'admet pas de racines multiples.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait les égalités

$$(\alpha y_\lambda + \beta y'_\lambda)|_{x=b} = 0,$$

$$\left(\alpha \frac{\partial y_\lambda}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial y'_\lambda}{\partial \lambda}\right)\Big|_{x=b} = 0.$$

Puisque α et β ne sont pas simultanément nuls, il en découle la relation

$$W\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial \lambda}, y_\lambda\right)\Big|_{x=b} = 0.$$

Cela contredit (9), car $k(b) > 0$.

4) *Soit* $q = q(x, \nu)$ *une fonction de paramètre* ν. *Si* $\frac{\partial q(x, \nu)}{\partial \nu} > 0$ *pour tout* x, *les valeurs propres croissent avec l'augmentation de* ν.

Pour le démontrer, on obtient préalablement de l'équation et des conditions aux limites pour la fonction propre $y_\lambda(x)$ l'équation différentielle et les conditions aux limites pour la fonction $\varphi_\lambda(x) = \frac{\partial y_\lambda}{\partial \nu}$. On a

$$L\varphi_\lambda = -\lambda\rho\varphi_\lambda + \left(\frac{\partial q}{\partial \nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}\rho\right) y_\lambda,$$

$$\varphi_\lambda(a) = \varphi'_\lambda(a) = 0,$$

$$[\alpha\varphi_\lambda(x) + \beta\varphi'_\lambda(x)]|_{x=b} = 0.$$

Puisque des conditions aux limites pour $y_\lambda(x)$ et $\varphi_\lambda(x)$ il découle que $W(\varphi_\lambda, y_\lambda) = 0$ quand $x = a$ et $x = b$, l'égalité (7) pour $f = \varphi_\lambda$, $g = y_\lambda$ entraîne la relation

$$\int_a^b \left(\frac{\partial q}{\partial \nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}\rho\right) y_\lambda^2(x)\,dx = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \nu} = \frac{\int_a^b \frac{\partial q}{\partial \nu} y_\lambda^2\,dx}{\int_a^b y_\lambda^2 \rho\,dx} > 0.$$

5) Montrons de quelle façon on peut minorer les valeurs propres dans un cas important du point de vue des applications où $\alpha_0\beta_0 \leqslant \leqslant 0$, $\alpha\beta \geqslant 0$. Pour obtenir cette estimation nous multiplions l'équation (4) de la fonction propre par $y(x)$ et nous prenons l'intégrale de $x = a$ à $x = b$. Il vient

$$\lambda = -\frac{\int_a^b y\,Ly\,dx}{\int_a^b y^2\rho\,dx} = \frac{\int_a^b qy^2\,dx - \int_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx}{\int_a^b y^2\rho\,dx}.$$

D'autre part,

$$-\int_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx = -kyy'\Big|_a^b + \int_a^b k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Pour évaluer la substitution, appliquons les conditions aux limites (5) en multipliant la première condition par $(\alpha_0 y' + \beta_0 y)|_{x=a}$ et la seconde par $(\alpha y' + \beta y)\,|_{x=b}$. Il en résulte

$$yy'|_{x=a} = -\frac{\alpha_0\beta_0}{\alpha_0^2+\beta_0^2}(y^2+y'^2)|_{x=a} \geqslant 0,$$
$$yy'|_{x=b} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}(y^2+y'^2)|_{x=b} \leqslant 0.$$

Aussi

$$-\int_a^b y\frac{d}{dx}\left(k\frac{dy}{dx}\right)dx \geqslant 0,$$

d'où il résulte que

$$\lambda \geqslant \frac{\int_a^b qy^2\,dx}{\int_a^b y^2\rho\,dx}.$$

Puisque $\rho(x) > 0$, on a en vertu du théorème de la moyenne

$$\int_a^b qy^2 dx = \left(\frac{q}{\rho}\right)\Big|_{x=x^*}\int_a^b y^2\rho\,dx, \quad x^* \in (a, b).$$

De cette façon,

$$\lambda \geqslant \min_{x\in(a,\,b)} \frac{q(x)}{\rho(x)}. \tag{10}$$

Dans le cas où les fonctions propres $y(x) \neq$ const, on est en présence de l'inégalité stricte, car

$$\int_a^b k\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx > 0.$$

6) En résolvant des problèmes aux limites de physique mathématique, on a largement recours aux *développements des fonctions suivant les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x).$$

Ici $y_n(x)$ est la fonction propre correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_n$. On trouve les coefficients a_n à partir des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x)\, dx}{\int_a^b y_n^2(x)\, \rho(x)\, dx}.$$

3. Propriétés fondamentales des fonctions propres et des valeurs propres du problème aux limites pour l'équation de Bessel. Dans les problèmes présentant un intérêt physique, on a souvent besoin de déterminer les fonctions propres et les valeurs propres de l'équation (4) pour le cas où les coefficients de l'équation admettent une singularité lorsque $x \to a$ ($k(x) \to 0$ ou $q(x) \to \infty$, etc.). Dans ce cas toutes les propriétés énoncées ci-dessus des fonctions propres et des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville restent également en vigueur, le comportement des coefficients de (4) pour $x \to a$ étant soumis à des conditions suffisamment générales.

Après avoir effectué l'analyse du problème de Sturm-Liouville, nous pouvons maintenant formuler les propriétés fondamentales des fonctions propres et des valeurs propres pour l'équation

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0 \qquad (\nu \geqslant 0) \qquad (11)$$

avec la condition aux limites $[\alpha y(x) + \beta y'(x)]\,|_{x=l} = 0$ et la condition physiquement évidente d'être bornée pour $x \to 0$. Pour des valeurs données de λ et de $\nu > 0$, il n'y a qu'une seule des deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (11) qui sera bornée dans le voisinage du point $x = 0$ (voir corollaire du théorème 4 du § 1).

L'équation (11) coïncide avec l'équation (2) quand $\nu = n$, $x = r$, $l = r_0$ et représente un cas particulier de l'équation (4) quand $k(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x$, $\rho(x) = x$, $a = 0$, $b = l$.

Dans le problème de Sturm-Liouville pour les équations qui n'ont pas de singularités, on détermine les fonctions propres à partir des conditions aux limites homogènes de la forme (5) tant pour $x = a$ que pour $x = b$. Cela étant, les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres et de caractère réel des valeurs propres sont basées sur le fait que l'opérateur L est autoconjugué:

$$\int_a^b (fLg - gLf)\, dx = 0.$$

Conformément à (7), on a

$$\int_a^b (fLg - gLf)\, dx = k(x)\,(fg' - gf')\,\Big|_a^b.$$

Si les fonctions f et g satisfont aux conditions aux limites homogènes tant pour $x = a$ que pour $x = b$, l'opérateur L sera autoconjugué grâce au fait que

$$(fg' - gf')\,|_{x=a,\,b} = 0.$$

Admettons maintenant que le point $x = a$ est un point singulier de l'équation. Alors les propriétés des fonctions propres et des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville pour les équations sans singularité sont évidemment conservées aussi pour les équations admettant une singularité si le caractère borné de la fonction pour $x = a$ entraîne la condition

$$k(x)\,(fg' - gf')\,|_{x=a} = 0.$$

Comme on l'a déjà indiqué, l'équation (11) admet une solution bornée pour $x = 0$

$$y_\lambda(x) = J_\nu(sx) \quad (s = \sqrt{\lambda}).$$

Montrons que pour les fonctions $f(x) = J_\nu(s_1x)$ et $g(x) = J_\nu(s_2x)$ avec $s_1 \neq s_2$ la condition aux limites au point zéro sera automatiquement remplie si $\nu > -1$. En effet, appliquant le développement (2) du § 19, on a

$$x\left[J_\nu(s_1x)\frac{d}{dx}J_\nu(s_2x) - J_\nu(s_2x)\frac{d}{dx}J_\nu(s_1x)\right] =$$

$$= x\left\{\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\left[(s_1x)^\nu \nu s_2\,(s_2x)^{\nu-1} - (s_2x)^\nu \nu s_1\,(s_1x)^{\nu-1}\right] + O(x^{2\nu+1})\right\} = O(x^{2\nu+2}).$$

Si $\nu > -1$, alors $O(x^{2\nu+2}) \to 0$ pour $x \to 0$.

Nous en venons aux assertions suivantes.

1) *Le problème considéré a pour fonctions propres les fonctions*

$$y_{\nu m}(x) = J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu m}}\, x) \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots),$$

et les valeurs propres sont déduites de l'équation

$$\alpha J_\nu(z) + \gamma z J'_\nu(z) = 0, \tag{12}$$

où

$$z = \sqrt{\lambda}\, l, \qquad \gamma = \frac{\beta}{l}.$$

Si $\frac{\alpha}{\gamma} + \nu < 0$, l'équation (12) admettra une racine correspondant à la valeur propre $\lambda < 0$. Pour une telle valeur de λ, il convient de remplacer dans tous les calculs suivants $\sqrt{\lambda}$ et $J_\nu(\sqrt{\lambda}\, x)$ par $i\sqrt{-\lambda}$ et $e^{i\frac{\pi\nu}{2}} I_\nu(\sqrt{-\lambda}\, x)$ respectivement.

2) *Les fonctions propres* $J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu m}} x)$ *sont orthogonales par rapport au poids* x *sur l'intervalle* $(0,\ l)$, c.-à-d.

$$\int_0^l J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu m}}\, x)\, J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, x)\, x\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

Le carré de norme des fonctions propres est calculé suivant la formule (9). On a

$$N_{\nu n}^2 = \int_0^l x J_\nu^2(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, x)\, dx = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} W\left(x J'_\nu(\sqrt{\lambda} x),\ J_\nu(\sqrt{\lambda} x)\right)\Big|_{\substack{x=l \\ \lambda=\lambda_{\nu n}}}$$

(on prend la dérivée par rapport à l'argument de la fonction de Bessel). Le wronskien est calculé sans peine en exprimant la dérivée seconde en fonction de la dérivée première et la fonction elle-même au moyen de l'équation de Bessel. Il vient en définitive

$$N_{\nu n}^2 = \frac{l^2}{2}\left\{[J'_\nu(z)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_\nu^2(z)\right\}\Big|_{z=\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, l}. \tag{13}$$

3) *L'équation* (12) *admet un ensemble infini dénombrable de racines isolées, dont chacune est réelle et simple.*

L'infinité des zéros est déduite sans peine du comportement asymptotique des fonctions de Bessel. Si $\alpha\beta \geqslant 0$, alors $\lambda_{\nu m} > 0$. Puisque $\frac{\partial q}{\partial \nu} = \frac{1}{x} > 0$, les racines de (12) croissent avec ν.

4. Développements de Dini et de Fourier-Bessel. Intégrale de Fourier-Bessel. Le développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\nu n} J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\, x), \tag{14}$$

où

$$a_{\nu n}=\frac{1}{N_{\nu n}^2}\int_0^l xf(x)\,J_\nu(\sqrt{\lambda_{\nu n}}\,x)\,dx. \tag{15}$$

porte le nom de *développement de Dini* de la fonction $f(x)$. Ici $\lambda_{\nu n}$ est racine de l'équation (12), et le carré de norme se calcule par la formule (13). Si l'équation (12) est de la forme $J_\nu(z)=0$, ce qui correspond au cas où $\gamma=0$, le développement (14) est appelé *développement de Fourier-Bessel.*

Le théorème suivant a lieu.

Théorème 1. *Soit* $\sqrt{x}\,f(x)$ *une fonction absolument intégrable sur le segment* $[0,\ l]$ *et soit* $\nu\geqslant -1/2$. *Alors, pour* $0<x<l$, *le développement* (14) *a lieu simultanément avec le développement correspondant en série de Fourier ordinaire.*

La théorie des développements de Fourier-Bessel et de Dini est exposée dans la monographie [2].

Dans les problèmes de physique mathématique, on a souvent recours à la forme limite des développements de Fourier-Bessel tirée de (14) pour $l\to\infty$. Nous obtiendrons ce développement à l'aide de raisonnements qui ne sont pas très rigoureux.

En vertu de (13) à (15)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_0^l xf(x)\,J_\nu(k_nx)\,dx}{\frac{l^2}{2}[J'_\nu(k_nl)]^2}\,J_\nu(k_nx), \tag{16}$$

où les valeurs de k_n sont déterminées à partir de l'équation

$$J_\nu(k_nl)=0. \tag{17}$$

Lorsque $l\to\infty$, les premiers termes de la série (16) sont négligeables du fait que le dénominateur comprend le facteur l^2. C'est pourquoi on peut se servir des valeurs asymptotiques de k_n avec des n assez grands. A l'aide de (17), on obtient

$$\cos\left(k_nl-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\approx 0,$$

d'où

$$k_nl\approx \pi n+\text{const}.$$

Calculons $J'_\nu(k_n\,l)$ par la formule de récurrence. Il vient

$$[J'_\nu(k_nl)]^2=[J_{\nu+1}(k_nl)]^2\approx\frac{2}{\pi(k_nl)}\sin^2\left(k_nl-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\approx\frac{2}{\pi k_nl}.$$

Puisque $\Delta k_n = k_{n+1} - k_n \approx \pi/l$, on peut récrire le développement (16) sous la forme

$$f(x) \approx \sum_{k_n=0}^{\infty} k_n J_\nu(k_n x)\,\Delta k_n \int_0^l x f(x) J_\nu(k_n x)\,dx.$$

Puisque $\Delta k_n \to 0$ quand $l \to \infty$, on peut remplacer la sommation suivant les valeurs de k_n par l'intégration ; cela nous donne

$$f(x) = \int_0^\infty kF(k) J_\nu(kx)\,dk, \tag{18}$$

$$F(k) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(kx)\,dx. \tag{19}$$

Le développement (18) est dit *intégrale de Fourier-Bessel.*

Les conditions selon lesquelles une fonction arbitraire $f(x)$ peut être développée en intégrale de Fourier-Bessel sont exposées dans [2]. On a le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit* $\sqrt{x}\, f(x)$ *une fonction absolument intégrable sur l'intervalle* $(0, \infty)$ *et soit* $\nu \geqslant -{}^1/_2$. *Alors, pour* $x > 0$, *le développement* (18) *à* (19) *a lieu simultanément avec le développement correspondant en intégrale de Fourier.*

Il est à noter que pour $\nu = \pm {}^1/_2$ les développements (14) et (18) se réduisent aux développements de la fonction $\sqrt{x}\, f(x)$ suivant les cosinus ($\nu = -{}^1/_2$) ou suivant les sinus ($\nu = {}^1/_2$).

§ 24*. Théorèmes d'addition

Soient r, ρ, R les côtés d'un triangle quelconque et θ l'angle formé par les côtés r et ρ.

En théorie des fonctions cylindriques, on appelle *théorèmes d'addition* les formules de la forme

$$Z_\nu(R) = f(r, \rho, \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r)\,\psi_n(\rho)\,\chi_n(\theta), \tag{1}$$

qui donnent le développement de la fonction cylindrique $Z_\nu(R)$ d'ordre ν en une série dont les termes représentent les produits d'une fonction de forme assez simple $f(r, \rho, \theta)$, indépendante de l'indice de sommation n, par des facteurs dont chacun ne dépend que d'une seule des variables r, ρ, θ. Les formules de ce type jouent un rôle important en physique mathématique et dans diverses applications des fonctions cylindriques *).

*) Voir par exemple A. Galanine « Théorie des réacteurs nucléaires à neutrons thermiques », Moscou, Atomizdat, 1959 (en russe).

1. Théorème d'addition de Graf. Désignons par $Z_\nu(z)$ une des fonctions cylindriques $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Pour la déduc-

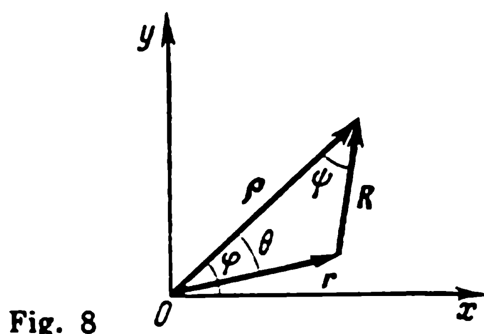


Fig. 8

tion du théorème d'addition le plus simple, utilisons la représentation intégrale de Sommerfeld de la fonction cylindrique $Z_\nu(R)$:

$$Z_\nu(R) = A\int_C e^{iR\sin\varphi - i\nu\varphi}\,d\varphi \tag{2}$$

(en ce qui concerne le choix des constantes A et des contours C pour diverses fonctions cylindriques, voir § 20).

Considérons le triangle de la figure 8. Projetant l'égalité vectorielle $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}$ sur l'axe des y, on aura

$$R\sin(\varphi+\psi) = \rho\sin\varphi - r\sin(\varphi-\theta).$$

Il est évident qu'en vertu du principe de prolongement analytique la relation obtenue reste également en vigueur pour les valeurs complexes de φ.

Les résultats obtenus au § 20 entraînent qu'il est possible de choisir le contour C de telle façon que son déplacement d'une valeur ψ inférieure à π ne modifie pas la valeur de l'intégrale. Changeons dans (2) φ en $\varphi+\psi$. Il vient alors

$$Z_\nu(R)\,e^{i\nu\psi} = A\int_C e^{iR\sin(\varphi+\psi)-i\nu\varphi}\,d\varphi = A\int_C e^{i\rho\sin\varphi + ir\sin(\theta-\varphi)-i\nu\varphi}\,d\varphi.$$

Puisque, d'après la formule (10) du § 20,

$$e^{ir\sin(\theta-\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)\,e^{in(\theta-\varphi)},$$

on a

$$Z_\nu(R)\,e^{i\nu\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} J_n(r)\,A\int_C e^{i\rho\sin\varphi - i(\nu+n)\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)\,Z_{\nu+n}(\rho)\,e^{in\theta}.$$

La possibilité de changement d'ordre de sommation et d'intégration est facile à démontrer. Nous arrivons donc à la formule définitive suivante:

$$Z_\nu(R)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r)\,Z_{\nu+n}(\rho)\,e^{in\theta}.$$

Comme après le changement $R\to kR$, $r\to kr$, $\rho\to k\rho$ les angles θ et ψ restent inchangés, la formule qu'on vient d'obtenir peut s'écrire comme suit:

$$Z_\nu(kR)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)\,Z_{\nu+n}(k\rho)\,e^{in\theta}. \tag{3}$$

La relation (3) est appelée *théorème d'addition de Graf*.

2. Théorème d'addition de Gegenbauer. Un autre théorème d'addition correspond au cas où la fonction $f(r, \rho, \theta) = R^\nu$ dans (1). Pour démontrer ce théorème, considérons la fonction

$$\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}=v(R),$$

où $Z_\nu(z)$ désigne toujours une des fonctions cylindriques $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$.

Pour fixer les idées admettons que $r<\rho$. On a alors $R\neq 0$, et la fonction $v(R)$ sera bornée pour $r\to 0$.

La fonction v de la variable R satisfait à l'équation (voir les formules (4) et (5) du § 18)

$$Rv''+(2\nu+1)\,v'+R\,v=0.$$

De cette équation, on tire sans peine l'équation aux dérivées partielles par rapport aux variables r et $\mu=\cos\theta$. Puisque $R = \sqrt{r^2+\rho^2+2r\rho\mu}$, on a

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{dv}{dR}\,\frac{r-\rho\mu}{R},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mu}=-\frac{dv}{dR}\,\frac{r\rho}{R},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{d^2v}{dR^2}\left(\frac{r-\rho\mu}{R}\right)^2+\frac{dv}{dR}\left[\frac{1}{R}-\frac{(r-\rho\mu)^2}{R^3}\right],$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}=\frac{d^2v}{dR^2}\left(\frac{r\rho}{R}\right)^2-\frac{dv}{dR}\,\frac{(r\rho)^2}{R^3}.$$

Eliminant ρ, on trouve

$$\frac{1}{R}\,\frac{dv}{dR}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{\mu}{r^2}\,\frac{\partial v}{\partial \mu}.$$

Puisque $R^2=(r-\rho\mu)^2+\rho^2(1-\mu^2)$, il vient

$$\frac{d^2v}{dR^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1-\mu^2}{r^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2}.$$

Nous obtenons pour la fonction $v(R)$ l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + (2\nu + 1) r \frac{\partial v}{\partial r} + r^2 v + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} - (2\nu + 1) \mu \frac{\partial v}{\partial \mu} = 0. \quad (4)$$

Cherchons la solution particulière de cette équation par la méthode de séparation des variables, en posant

$$v = \varphi(r) \psi(\mu).$$

Portons la forme supposée de la solution dans l'équation. Il vient

$$\frac{r^2\varphi'' + (2\nu+1) r\varphi' + r^2\varphi}{\varphi} = \frac{-(1-\mu^2)\psi'' + (2\nu+1)\mu\psi'}{\psi} = \lambda,$$

où λ est une constante.

D'où la fonction $\psi(\mu)$ a pour équation

$$[(1-\mu^2)^{\nu+1/2}\psi']' + \lambda(1-\mu^2)^{\nu-1/2}\psi = 0.$$

Pour $\nu - 1/2 \geqslant 0$, cette équation, comme on l'a montré au § 14, n'admet de solution continue sur le segment $[-1, 1]$ que si

$$\lambda = \lambda_n = n(n + 2\nu)$$

avec, à un facteur constant près,

$$\psi(\mu) = P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu),$$

où $P_n^{(\alpha,\, \beta)}(\mu)$ est un polynôme de Jacobi orthogonal par rapport au poids $(1-\mu)^\alpha (1+\mu)^\beta$ sur le segment $[-1, 1]$.

La fonction $\varphi(r)$ satisfait à l'équation

$$\varphi'' + \frac{2\nu+1}{r}\varphi' + \left[1 - \frac{n(n+2\nu)}{r^2}\right]\varphi = 0.$$

L'équation obtenue est un cas particulier de l'équation de Lommel. Son unique solution bornée pour $r \to 0$ est la fonction

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^\nu} J_{\nu+n}(r).$$

Ainsi, l'équation (4) a pour solutions bornées les fonctions

$$v_n(r, \mu) = \frac{1}{r^\nu} J_{\nu+n}(r) P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu). \quad (5)$$

Une solution bornée arbitraire de (4) pour $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant r < \rho$ se présente comme la superposition des solutions particulières de (5). On a donc

$$v(R) = \frac{Z_\nu(R)}{R^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{r^\nu} J_{\nu+n}(r) P_n^{(\nu-1/2,\, \nu-1/2)}(\mu), \quad (6)$$

où f_n est une constante indépendante de r et de μ.

Pour trouver les constantes $f_n = f_n(\rho)$, nous allons utiliser les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Jacobi:

$$f_n(\rho)\frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu} = \frac{1}{d_n^2}\int_{-1}^{1}\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu)(1-\mu^2)^{\nu-1/2}\,d\mu, \qquad (7)$$

où d_n^2 est le carré de norme du polynôme de Jacobi.

Pour calculer l'intégrale figurant dans le second membre de (7), appliquons la formule de Rodrigues pour les polynômes de Jacobi (voir § 7, 4)

$$P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-\mu^2)^{\nu-1/2}}\frac{d^n}{d\mu^n}[(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}]$$

et procédons à l'intégration par parties:

$$\int_{-1}^{1}\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu)(1-\mu^2)^{\nu-1/2}\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left[\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}\right]d\mu.$$

Toutes les substitutions s'annulent pour $\mu = \pm 1$ grâce à la puissance positive du facteur $(1-\mu^2)$.

D'autre part, nous avons pour une fonction $f(R)$ arbitraire

$$\frac{\partial}{\partial\mu}f(R) = -\frac{r\rho}{R}\frac{df}{dR},$$

d'où

$$\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}\left[\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}\right] = (r\rho)^n\left(-\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^n\left[\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}\right].$$

Il découle de la formule (11) du § 20 que

$$\left(-\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^n\left[\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}\right] = \frac{Z_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}.$$

Il en résulte

$$\int_{-1}^{1}\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu}P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu)(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}(r\rho)^n\int_{-1}^{1}\frac{Z_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu.$$

On en tire, conformément à (7),

$$f_n(\rho)\frac{J_{\nu+n}(r)}{r^{\nu+n}} = \frac{\rho^n}{2^n n!\,d_n^2}\int_{-1}^{1}\frac{Z_{\nu+n}(R)}{R^{\nu+n}}(1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\,d\mu. \qquad (8)$$

Soit dans (8) $r \to 0$. Alors $R \to \rho$ et, par conséquent,

$$\frac{f_n(\rho)}{2^{\nu+n}\Gamma(\nu+n+1)} = \frac{Z_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu} \frac{1}{2^n n!\, d_n^2} \int_{-1}^{1} (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\, d\mu.$$

Puisque (voir § 7, 4)

$$d_n^2 = \frac{2^{2\nu-1}\Gamma^2\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)}{n!\,(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}$$

et

$$\int_{-1}^{1} (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\, d\mu = 2\int_{0}^{1} (1-\mu^2)^{n+\nu-1/2}\, d\mu =$$

$$= \int_{0}^{1} (1-t)^{n+\nu-1/2}\, t^{-1/2}\, dt = \frac{\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\nu+1)},$$

on trouve finalement

$$f_n(\rho) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}} \frac{(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{Z_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu}.$$

En définitive, le développement (6) prend la forme

$$\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu} \frac{Z_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu} P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu). \qquad (9)$$

Si l'on prend au lieu des polynômes de Jacobi ceux de Gegenbauer (voir § 7, 4)

$$C_n^\nu(\mu) = \frac{(2\nu)_n}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(\nu-1/2,\,\nu-1/2)}(\mu),$$

le développement (9) revêt une forme plus simple:

$$\frac{Z_\nu(R)}{R^\nu} = 2^\nu\Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n) \frac{J_{\nu+n}(r)}{r^\nu} \frac{Z_{\nu+n}(\rho)}{\rho^\nu} C_n^\nu(\mu). \qquad (10)$$

Rappelons que cette formule a été déduite pour $\nu - 1/2 \geqslant 0$, $r < \rho$.

Il est évident que la formule (10) reste vraie si l'on opère le changement $R \to kR$, $r \to kr$, $\rho \to k\rho$, c.-à-d.

$$\frac{Z_\nu(kR)}{(kR)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu} \frac{Z_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu} C_n^\nu(\mu). \qquad (11)$$

La relation (11) porte le nom de *théorème d'addition de Gegenbauer.*

Nous venons de démontrer les théorèmes d'addition de Graf et de Gegenbauer pour certaines contraintes imposées aux paramètres. A l'aide du principe de prolongement analytique, on arrive à étendre les formules (3) et (11) à un domaine plus vaste de valeurs des paramètres.

3. Développement d'une onde sphérique et plane suivant les polynômes de Legendre. Considérons quelques corollaires du théorème d'addition de Gegenbauer.

1) Posant dans (11) $\nu = 1/2$, $Z_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(z)$ et utilisant l'expression explicite de la fonction $H_{1/2}^{(1)}(z)$, on obtient

$$\frac{e^{ikR}}{R} = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\mu).$$

Nous nous sommes servis du fait que $C_n^{1/2}(\mu) = P_n(\mu)$, où $P_n(\mu)$ est un polynôme de Legendre.

2) Il y a intérêt à considérer la forme limite du théorème d'addition qui découle de (11) pour $Z_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(z)$ et $\rho \to \infty$. On a

$$R = \rho \sqrt{1 - \frac{2r\mu}{\rho} + \frac{r^2}{\rho^2}} = \rho - r\mu + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{\frac{1}{(k\rho)^\nu} H_{\nu+n}^{(2)}(k\rho)}{\frac{1}{(kR)^\nu} H_\nu^{(2)}(kR)} = \lim_{\rho \to \infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\nu+1/2} i^n e^{-ik(\rho - R)} = i^n e^{-ikr\mu}.$$

Aussi peut-on déduire de (11)

$$e^{ikr\mu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} i^n (\nu + n) \frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu} C_n^\nu(\mu).$$

On en tire aisément, pour $\nu = 1/2$, le *développement d'une onde plane* $e^{i\mathbf{kr}}$ *suivant les polynômes de Legendre*:

$$e^{i\mathbf{kr}} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(n + \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(kr) P_n(\mu).$$

Ici $\mathbf{k}$ est le vecteur onde, $\mu = \cos\theta$, θ l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{r}$.

§ 25*. Intégrales définies contenant des fonctions cylindriques

Fréquemment, dans les multiples applications des fonctions cylindriques, on a besoin de calculer certaines intégrales définies contenant des fonctions cylindriques. On y procède soit au moyen des représentations intégrales des fonctions cylindriques, soit par développement de ces dernières en séries. Nous nous bornerons à considérer deux exemples simples et importants.

1) *Intégrale de Weber*

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx \qquad (a>0,\ b>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1).$$

Pour la calculer, on développe la fonction de Bessel $J_\nu(bx)$ en série. On a

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx = \int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+1}\left[\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\left(\frac{bx}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\right] dx =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2k}\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{2k+2\nu+1}\, dx.$$

D'autre part,

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{2k+2\nu+1}\, dx = \frac{1}{2a^{2k+2\nu+2}}\int_0^\infty e^{-t} t^{k+\nu}\, dt = \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{2a^{2k+2\nu+2}}.$$

D'où

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}}\, e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \tag{1}$$

2) *Intégrale de Sonine-Gegenbauer*

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx \qquad (a>0,\ b>0,\ y>0,\ \mathrm{Re}\,\nu>-1).$$

Pour calculer cette intégrale, utilisons la représentation intégrale (7) du § 22 de la fonction de Macdonald et la formule (1). On a

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx =$$

$$= \frac{a^\mu}{2^{\mu+1}}\int_0^\infty J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx \int_0^\infty e^{-t-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4t}}\frac{dt}{t^{\mu+1}} =$$

$$= \frac{a^\mu}{2^{\mu+1}}\int_0^\infty e^{-t-\frac{a^2y^2}{4t}}\frac{dt}{t^{\mu+1}}\int_0^\infty e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx =$$

$$=2^{\nu-\mu}a^{\mu-2\nu-2}b^{\nu}\int_0^\infty e^{-t\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{a^2y^2}{4t}}\frac{dt}{t^{\mu-\nu}}=$$

$$=\frac{2^{\nu-\mu}b^{\nu}}{a^{\mu}}(a^2+b^2)^{\mu-\nu-1}\int_0^\infty e^{-u-\frac{y^2(a^2+b^2)}{4u}}\frac{du}{u^{\mu-\nu}}=$$

$$=\frac{b^{\nu}}{a^{\mu}}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\nu-1}K_{\mu-\nu-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

De cette façon,

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{(x^2+y^2)^{\mu/2}}J_\nu(bx)\,x^{\nu+1}\,dx=$$

$$=\frac{b^{\nu}}{a^{\mu}}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y}\right)^{\mu-\nu-1}K_{\mu-\nu-1}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right). \qquad (2)$$

Signalons quelques corollaires importants de la relation (2).

a) Soit $\mu={}^1/_2$. Comme

$$K_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z},$$

on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}J_\nu(bx)\,x^{\nu+1}\,dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi b}}\left(\frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{\nu+1/2}K_{\nu+1/2}\left(y\sqrt{a^2+b^2}\right). \qquad (3)$$

Il vient en particulier, pour $\nu=0$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}J_0(bx)\,x\,dx=\frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (4)$$

Lorsque $y\to 0$ et $\nu+{}^1/_2>0$, la formule (3) donne

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(bx)\,x^\nu\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi(a^2+b^2)}}\left(\frac{2b}{a^2+b^2}\right)^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right). \qquad (5)$$

En déduisant (5), nous nous sommes servis du fait que pour $\nu>0$ et $z\to 0$

$$K_\nu(z)\approx\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\,\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}=\frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}.$$

b) Soit dans (2) $\nu<2\mu-{}^3/_2$ et $a\to 0$. Comme on a alors

$$K_\mu(az)\approx\frac{\Gamma(\mu)}{2}\left(\frac{az}{2}\right)^{-\mu},$$

il vient

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)\,x^{\nu+1}}{(x^2+y^2)^\mu}\,dx = \left(\frac{b}{2y}\right)^{\mu-1} \frac{y^\nu}{\Gamma(\mu)} K_{\mu-\nu-1}(by). \tag{6}$$

Posant ici $\mu = {}^3/_2$, $\nu = 0$, nous avons

$$\int_0^\infty \frac{J_0(bx)\,x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx = \frac{e^{-by}}{y}. \tag{7}$$

La déduction des relations (1) à (7) a été effectuée étant donné certaines contraintes imposées aux paramètres. A l'aide du théorème 2 du § 1 et du principe de prolongement analytique, on arrive facilement à étendre les résultats obtenus à un domaine plus vaste de valeurs des paramètres. En particulier, la relation (6) reste vraie lorsque

$$-1 < \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}\mu - \frac{1}{2}.$$

Posant $\mu = {}^1/_2$, $\nu = 0$, nous tirons de cette relation

$$\int_0^\infty \frac{xJ_0(bx)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \frac{e^{-by}}{b}.$$

§ 26*. Méthode de Wentzel-Kramers-Brillouin

1. Approximation quasi classique pour le cas unidimensionnel. En résolvant les équations différentielles du deuxième ordre de la forme

$$u'' + pf(x)\,u = 0, \tag{1}$$

où p est un paramètre suffisamment grand, on utilise couramment une méthode de solution approchée de ces équations, qui consiste à considérer au lieu de l'équation (1) l'équation

$$\tilde{u}'' + [pf(x) + \theta(x, p)]\,\tilde{u} = 0 \tag{2}$$

dans laquelle la fonction $\theta(x, p)$ est choisie de telle façon qu'elle reste bornée pour $p \to \infty$ et que les solutions de (2) soient connues. Si le paramètre p est suffisamment grand, il y a lieu de supposer que les solutions de l'équation (2) ne différeront que très peu de celles de l'équation (1). Parmi les méthodes de ce type, la méthode la plus développée est la méthode quasi classique *) ou la *méthode de Wentzel-Kramers-Brillouin* (en abrégé W.K.B.). Elle consiste essentiellement dans ce qui suit.

Admettons que la fonction $f(x)$ soit de la forme

$$f(x) = (x - x_0)^n\,\varphi(x),$$

*) Voir [13].

où $\varphi(x) \neq 0$ dans le domaine considéré. Sans nuire à la généralité, on peut poser que $x_0 = 0$.

Si $\varphi(x) = \text{const}$, l'équation (1) est un cas particulier de l'équation de Lommel et admet comme solution la fonction

$$u(x) = \left(\frac{\xi}{\sqrt{pf}}\right)^{1/2} Z_{1/(n+2)}(\xi), \tag{3}$$

où $\xi = \int\limits_0^x \sqrt{pf(x)}\,dx$, $Z_\nu(\xi)$ est une fonction cylindrique arbitraire d'ordre ν.

Si la fonction $\varphi(x)$ varie lentement, il est naturel d'attendre que la fonction $u(x)$ définie par la formule (3) fournira la solution approchée de l'équation (1). Posons donc pour $\varphi(x) \neq \text{const}$

$$\tilde{u}(x) = \left(\frac{\xi}{\sqrt{pf}}\right)^{1/2} Z_{1/(n+2)}(\xi), \quad \xi = \int\limits_0^x \sqrt{pf(x)}\,dx.$$

On vérifie sans peine que la fonction $\tilde{u}(x)$ satisfait à l'équation (2), dans laquelle

$$\theta(x, p) \equiv \theta(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)' - \frac{1}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(n+2)^2}\right] \frac{f(x)}{\left(\int\limits_0^x \sqrt{f(x)}\,dx\right)^2}. \tag{4}$$

On voit de (4) que $\theta(x, p)$ ne dépend pas du paramètre p et représente une fonction continue pour $x \neq 0$ si $\varphi(x)$ a la dérivée seconde continue. D'autre part, il existe une limite finie

$$\theta(0) = \lim_{x \to 0} \theta(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{n+6}\,\frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)} - \frac{n+5}{(n+4)(n+6)}\left(\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}\right)^2\right],$$

ce qu'on démontre en développant $f(x)$ et $\xi(x)$ suivant les puissances de x et en se bornant aux trois premiers termes du développement. Ainsi donc, la fonction $\theta(x)$ satisfait bien aux conditions énoncées plus haut.

Dans le cas où la fonction $\theta(x)$ est définie par la formule (4), les solutions des équations (1) et (2) seront proches, et ceci pour les raisons suivantes. Si $x \neq 0$, alors $f(x) \neq 0$. C'est pourquoi, pour des p suffisamment grands, nous avons $|pf(x)| \gg |\theta(x)|$. Il reste à considérer le domaine $x \sim 0$. Dans le voisinage du point $x = 0$ la fonction $\tilde{u}(x)$ sera notablement différente de $\tilde{u}(0)$ aux distances x pour lesquelles $\xi(x) \approx 1$. Puisqu'on a pour les petits x

$$\xi \approx \int\limits_0^x \sqrt{p\varphi(0)}\, x^{n/2}\,dx = \sqrt{p\varphi(0)}\,\frac{2}{n+2}\,x^{(n+2)/2},$$

la valeur de $\xi \approx 1$ aura lieu pour $x \sim \left(\frac{1}{p}\right)^{1/(n+2)}$. Mais pour des x si petits et des p grands, on aura

$$pf(x) \sim px^n \sim p^{2/(n+2)} \gg \theta(x).$$

De cette façon, nous avons dans tout le domaine en question

$$|\theta(x)| \ll |pf(x)|.$$

Puisque $\theta(x) \equiv 0$ pour $\varphi(x) = \text{const}$ et pour toute valeur de p, on peut espérer que les fonctions $u(x)$ et $\tilde{u}(x)$ seront proches non seulement si p est grand et $\varphi(x)$ est une fonction arbitraire, mais aussi dans le cas où $p = 1$ et la fonction $\varphi(x)$ varie lentement.

Remarquons que les fonctions $\tilde{u}(x)$ présentent pour n quelconque un comportement asymptotique de même type lorsque $\xi \to \infty$:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[4]{p|f(x)|}}\left(Ae^{-|\xi|} + Be^{|\xi|}\right) & \text{pour } f(x) < 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt[4]{pf(x)}}\left(C\sin\xi + D\cos\xi\right) & \text{pour } f(x) > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

La méthode W.K.B. s'emploie le plus souvent en pratique dans les cas où $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = 0$ la fonction $\tilde{u}(x)$ peut être exprimée au moyen de fonctions élémentaires et coïncide avec sa représentation asymptotique (5). Quand $n = 1$, on a

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{|\xi|}{\sqrt{p|f(x)|}}\right)^{1/2}\left[AK_{1/3}(|\xi|) + BI_{1/3}(|\xi|)\right] & \text{pour } f(x) < 0; \\ \left(\dfrac{|\xi|}{\sqrt{pf(x)}}\right)^{1/2}\left[CJ_{-1/3}(|\xi|) + DJ_{1/3}(|\xi|)\right] & \text{pour } f(x) > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

On a utilisé la propriété de la fonction cylindrique $Z_\nu(z)$ de rester fonction cylindrique du même ordre quand on remplace z par $-z$, qui tient à ce que l'équation de Bessel ne change pas lorsqu'on change z en $-z$.

Si l'on veut chercher seulement les solutions bornées pour $\xi \to \to \pm\infty$, il convient de poser dans (6) $B = 0$. Les coefficients C et D se déterminent à partir des conditions de continuité des fonctions $\tilde{u}(x)$ et $\tilde{u}'(x)$ pour $\xi = 0$, ce qui donne $C = D = \frac{\pi}{\sqrt{3}}A$.

C'est la fonction $\tilde{u}(x)$ répondant au cas $f(x) = x$, $p = 1$ et satisfaisant à la condition d'être bornée qui est la plus usitée dans les applications. Pour $A = 1/\sqrt{2\pi}$ cette fonction porte le nom de *fonction d'Eyree* $v(x)$ et s'écrit

$$v(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{|x|}{3\pi}}\, K_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}|x|^{3/2}\right) & (x < 0); \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{\pi x}\left[J_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right)\right] & (x \geqslant 0). \end{cases}$$

A l'aide des développements asymptotiques des fonctions cylindriques, on établit sans peine le comportement asymptotique de la fonction $v(x)$ pour $x \to \pm\infty$:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} |x|^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}|x|^{3/2}} & (x < 0); \\ x^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) & (x > 0), \end{cases}$$

2. Application de la méthode W.K.B. à une équation admettant une singularité. Cas du champ à symétrie centrale. Lors de l'étude du mouvement d'une particule dans un champ à symétrie centrale, on applique avantageusement la méthode W.K.B. à une équation de la forme

$$u'' + \left[\omega(x) - \frac{l(l+1)}{x^2}\right] u = 0 \tag{7}$$

admettant une singularité pour $x \to 0$. Par changement de variables $x = e^z$, $u = e^{z/2} v(z)$, on réduit l'équation (7) à la forme (1), où

$$pf(z) = e^{2z}\left[\omega(e^z) - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 e^{-2z}\right].$$

Reprenant les variables anciennes, on remarque que l'approximation quasi classique de la solution de l'équation (7) prend la même forme que pour l'équation (1) si l'on remplace dans (6) $pf(x)$ par $\omega(x) - \frac{(l+1/2)^2}{x^2}$, c.-à-d. si l'on pose

$$\xi(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\omega(x) - \frac{(l+1/2)^2}{x^2}}\, dx,$$

où x_0 est racine de l'équation $\omega(x) - \frac{(l+1/2)^2}{x^2} = 0$ (on a supposé que x_0 est une racine simple; les modifications que subit la formule de $\tilde{u}(x)$ dans le cas de racine multiple sont évidentes).

3. Application de la méthode W.K.B. à la recherche du comportement asymptotique des fonctions cylindriques d'ordre élevé. Formules de Langer. On peut appliquer la méthode W.K.B. à la recherche du comportement asymptotique des fonctions cylindriques d'ordre ν élevé. Cherchons en particulier le comportement asymptotique de la fonction $H_\nu^{(1)}(x)$ pour $\nu \gg 1$ et pour des x positifs. A cet effet, mettons l'équation de Bessel

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0$$

sous la forme (1) par le changement $v(x) = \sqrt{x}\, u(\nu x)$. La fonction $v(x)$ satisfait à l'équation (voir l'équation de Lommel)

$$v'' + \nu^2 \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{4\nu^2}}{x^2}\right) v = 0.$$

Dans ce cas nous reprenons nos raisonnements précédents et nous posons dans (6)

$$p=\nu^2, \quad f(x)=1-\frac{1}{x^2}.$$

On a

$$|\xi(x)|=\nu\left|\int_1^x \sqrt{1-1/x^2}\,dx\right|=\begin{cases}\nu(\operatorname{arth} s-s) & (x\leqslant 1),\\ \nu(s-\operatorname{arctg} s) & (x\geqslant 1).\end{cases}$$

Ici $s=\sqrt{|1-x^2|}$.

En approximation quasi classique, qui est vraie pour des ν suffisamment grands, on obtient

$$v(x)=\sqrt{\frac{x|\xi|}{\nu s}}\begin{cases}AI_{-1/3}(|\xi|)+BI_{1/3}(|\xi|) & (x\leqslant 1),\\ CH^{(1)}_{1/3}(|\xi|)+DH^{(2)}_{1/3}(|\xi|) & (x\geqslant 1).\end{cases} \tag{8}$$

Posons $v(x)=\sqrt{x}\,H^{(1)}_{\nu}(\nu x)$. Pour déterminer les coefficients C et D, comparons les termes principaux de la représentation asymptotique pour $x\to\infty$ dans le premier et le second membre de (8). On a pour $x\to\infty$

$$s(x)=x+O\left(\frac{1}{x}\right), \quad |\xi(x)|=\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

aussi

$$\sqrt{x}\,H^{(1)}_{\nu}(\nu x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\,e^{i(\nu x-\pi\nu/2-\pi/4)}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\{Ce^{i[\nu(x-\pi/2)-\pi/6-\pi/4]}+De^{-i[\nu(x-\pi/2)-\pi/6-\pi/4)]}\},$$

d'où il découle que

$$D=0, \quad C=e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On a donc pour $x\geqslant 1$

$$v(x)=e^{i\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{x|\xi|}{\nu s}}\,H^{(1)}_{1/3}(|\xi|).$$

Développons la quantité $|\xi(x)|$ suivant les puissances de $s=\sqrt{|1-x^2|}$; il s'ensuit que la quantité $|\xi(x)|$ peut être mise sous la forme

$$|\xi(x)|=\nu s^3\varphi(1-x^2),$$

tant pour $x<1$ que pour $x>1$; ici

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2k+3}.$$

On voit donc que la fonction $\sqrt{\frac{x}{\nu s}}\,|\xi|^{1/6}$ admet un développement identique suivant les puissances de $1-x^2$ tant pour $x<1$ que pour $x>1$. C'est pourquoi, pour obtenir la conjugaison continue des expressions de $v(x)$ pour $x<1$ et $x>1$, on doit faire en sorte que la conjugaison des fonctions $\dfrac{v(x)}{\sqrt{\frac{x}{\nu s}}\,|\xi|^{1/6}}$

soit continue elle aussi pour $x < 1$ et $x > 1$; au fait, il s'agit des fonctions

$$f_1(x) = |\xi|^{1/3}[AI_{-1/3}(|\xi|) + BI_{1/3}(|\xi|)] \quad (x \leqslant 1)$$

et

$$f_2(x) = |\xi|^{1/3} e^{i\frac{\pi}{6}} H^{(1)}_{1/3}(|\xi|) \quad (x \geqslant 1).$$

On a

$$f_1(x) = \frac{A}{2^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{B|\xi|^{2/3}}{2^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} + O(\xi^2) =$$

$$= \frac{A}{2^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{B\left(\frac{\nu}{3}\right)^{2/3}}{2^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}(1-x^2) + O[(1-x^2)^2].$$

D'une façon analogue, utilisant la représentation (19) du § 19, on obtient

$$f_2(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{i\sin\frac{\pi}{3}\, 2^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\nu}{3}\right)^{2/3}}{i\sin\frac{\pi}{3}\, 2^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}(1-x^2) + O[(1-x^2)^2].$$

D'où

$$A = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{i\sin\frac{\pi}{3}}, \qquad B = \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{i\sin\frac{\pi}{3}}.$$

On obtient donc en définitive l'approximation quasi classique pour des ν grands :

$$H^{(1)}_\nu(\nu x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sqrt{\dfrac{\operatorname{arth} s}{s} - 1}}{i\sin\dfrac{\pi}{3}}\left[e^{i\frac{\pi}{6}} I_{-1/3}(|\xi|) + e^{-i\frac{\pi}{6}} I_{1/3}(|\xi|)\right] & (x \leqslant 1), \\ \sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{arctg} s}{s}}\, e^{i\frac{\pi}{6}} H^{(1)}_{1/3}(|\xi|) & (x \geqslant 1). \end{array} \right. \tag{9}$$

Egalant les parties réelles dans la formule (9), on obtient l'approximation quasi classique de la fonction de Bessel $J_\nu(\nu x)$ pour des valeurs élevées de ν :

$$J_\nu(\nu x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{\operatorname{arth} s}{s} - 1}\, K_{1/3}(|\xi|) & (x \leqslant 1), \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{arctg} s}{s}}\,[J_{-1/3}(|\xi|) + J_{1/3}(|\xi|)] & (x \geqslant 1). \end{array} \right. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) portent le nom de *formules de Langer*. Des estimations précises montrent que ces formules donnent une approximation uniforme pour les fonctions cylindriques avec une erreur $O\left(\frac{1}{\nu^{4/3}}\right)$. Il est remarquable que la formule (10) définit correctement le comportement de la fonction pour $x\to 0$ malgré le fait qu'elle ait été déduite au moyen des représentations asymptotiques des fonctions cylindriques pour $x\to\infty$.

Formules fondamentales

Fonctions de Bessel

Equation de Bessel:

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)\,u = 0,$$

$u = Z_\nu(z)$ est une fonction cylindrique d'ordre ν.

Equation de Lommel:

$$v'' + \frac{1-2\alpha}{z}\,v' + \left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{z^2}\right]v = 0,$$

$$v(z) = z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma).$$

Représentations intégrales de Poisson des fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ et des fonctions de Hankel $H_\nu^{(1,\,2)}(z)$:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos zt\,dt,\quad \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2};$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2};$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\frac{e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt,$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}.$$

Représentations intégrales de Sommerfeld:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\,d\varphi;$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_+} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\,d\varphi;$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{C_-} e^{iz\sin\varphi - i\nu\varphi}\,d\varphi$$

(les contours C_1, C_+, C_- sont représentés sur les figures 6 et 7, voir § 20);

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\varphi-in\varphi}\,d\varphi\,;$$

$$e^{iz\sin\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\,e^{in\varphi}.$$

Représentations asymptotiques:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{z}\right)\sin z+O\left(\frac{1}{z}\right)\cos z\right];$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right];$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Relation entre diverses fonctions cylindriques:

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(z),\quad H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(z)\,;$$

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)\right];$$

$$Y_\nu(z)=\frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)\right];$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{J_{-\nu}(z)-e^{-i\pi\nu}J_\nu(z)}{i\sin\pi\nu}\,;$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{e^{i\pi\nu}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{i\sin\pi\nu}\,;$$

$$Y_\nu(z)=\frac{\cos\pi\nu J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}\,;$$

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z).$$

Développements en séries:

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\,;$$

$$H_n^{(1,\,2)}(z)=J_n(z)\pm\frac{i}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\right\};$$

$$Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\left\{2J_n(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]\right\}$$

(pour $n = 0$, on suppose que la première des sommes soit nulle; $\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de la fonction gamma).

On voit sur les figures 9 et 10 les courbes représentatives des fonctions $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ pour certaines valeurs de n.

Relations de récurrence et formules de dérivation:

$$Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}Z_\nu(z);$$

$$Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)=2Z'_\nu(z);$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^\nu Z_\nu(z)]=z^{\nu-n}Z_{\nu-n}(z);$$

$$\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^{-\nu}Z_\nu(z)]=z^{-(\nu+n)}Z_{\nu+n}(z)$$

($Z_\nu(z)$ est n'importe laquelle des fonctions $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$).

Fonctions de Bessel d'ordre demi-entier:

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z;\quad Y_{1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z;$$

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{\pm i(z-\pi/2)};$$

$$J_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\cos z\quad(n=0,\ 1,\ \ldots);$$

$$H_{n-1/2}^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}\quad(n=0,\ 1,\ \ldots);$$

$$Y_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\sin z\quad(n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Intégrale de Fourier-Bessel:

$$f(x)=\int_0^\infty kF(k)\,J_\nu(kx)\,dk,$$

$$F(k)=\int_0^\infty xf(x)\,J_\nu(kx)\,dx.$$

Théorème d'addition de Graf:

$$Z_\nu(kR)\,e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)\,Z_{\nu+n}(k\rho)\,e^{in\theta}.$$

Théorème d'addition de Gegenbauer:

$$\frac{Z_\nu(kR)}{(kR)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu}\frac{Z_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu}C_n^\nu(\mu).$$

Ici r, ρ, R sont les côtés d'un triangle quelconque, θ l'angle formé par les côtés r et ρ, k un nombre arbitraire, $C_n^\nu(\mu)$ le polynôme de Gegenbauer, $Z_\nu(z)$ l'une quelconque des fonctions $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$ (voir fig. 8).

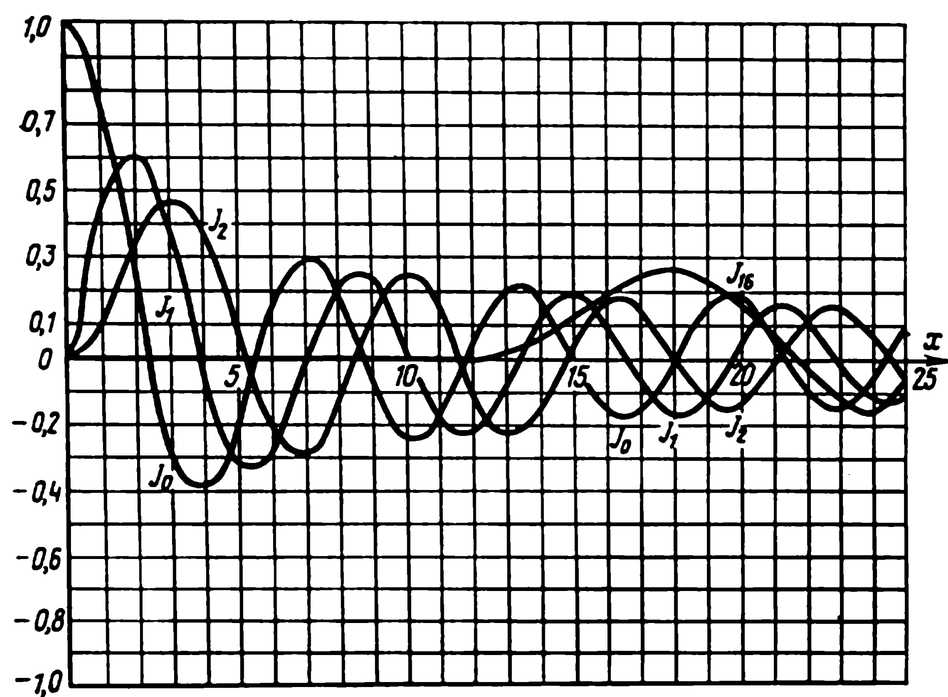

1,0
0,7
0,5
0,3
0,1
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1,0
5
10
15
20
25
x
J_0
J_1
J_2
J_{16}

Fig. 9

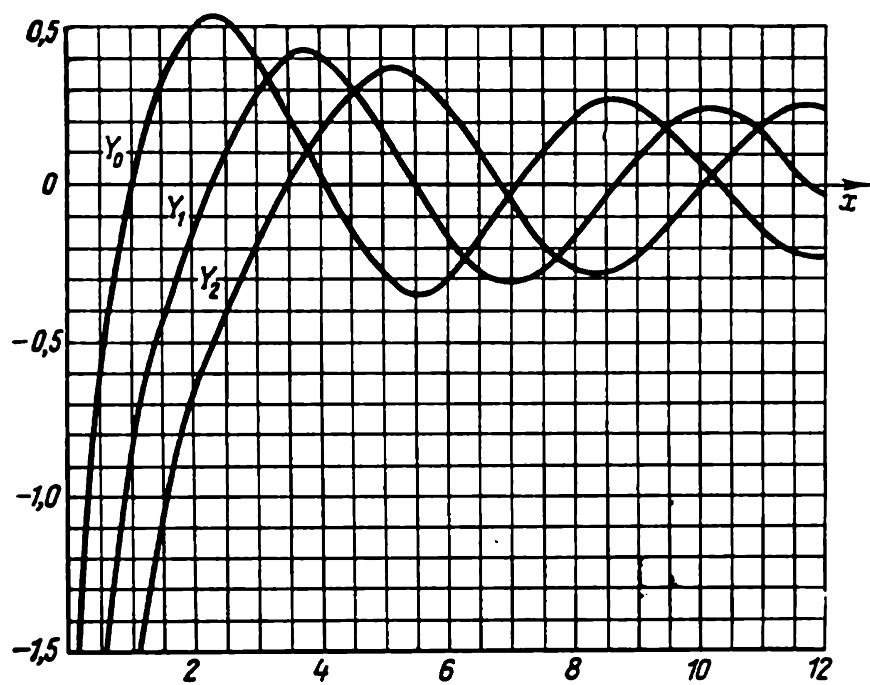

0,5
0
-0,5
-1,0
-1,5
2
4
6
8
10
12
x
Y_0
Y_1
Y_2

Fig. 10

Développement d'une onde sphérique suivant les polynômes de Legendre (voir le théorème d'addition de Gegenbauer):

$$\frac{e^{ikR}}{R} = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{H^{(1)}_{n+1/2}(k\rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\mu).$$

Développement d'une onde plane suivant les polynômes de Legendre:

$$e^{ikr} = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left(n+\frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(kr) P_n(\mu)$$

(k est le vecteur onde, $\mu = \cos\theta$, θ l'angle formé par les vecteurs k et r).

Fonctions de Bessel modifiées

Equation différentielle:

$$z^2u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0, \quad u(z) = Z_\nu(iz).$$

Cette équation différentielle admet comme solutions linéairement indépendantes pour $z > 0$ les fonctions

$$I_\nu(z) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{i\pi\frac{\nu+1}{2}} H^{(1)}_\nu(iz).$$

Représentations intégrales de Poisson:

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+{}^1/_2)} \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} zs\,(1-s^2)^{\nu-1/2}\,ds, \quad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2};$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu+{}^1/_2)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu-1/2} \left(1+\frac{s}{2z}\right)^{\nu-1/2} ds,$$

$$\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}.$$

Représentations intégrales de Sommerfeld pour $K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\operatorname{ch}\psi+\nu\psi}\,d\psi = \int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}\psi} \operatorname{ch}\nu\psi\,d\psi, \quad \operatorname{Re} z > 0;$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-t-\frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Comportement asymptotique pour $z \to +\infty$:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right];$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Relation entre les fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ à valeurs différentes de ν:

$$I_{-\nu}(z)=I_\nu(z);\quad K_{-\nu}(z)=K_\nu(z);$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\pi\nu}.$$

Développements en séries:

$$I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)};$$

$$K_n(z)=(-1)^{n+1}I_n(z)\ln\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}+$$

$$+\frac{1}{2}(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}\left[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\right]$$

pour $n=0$, on admet que la première des sommes s'annule).

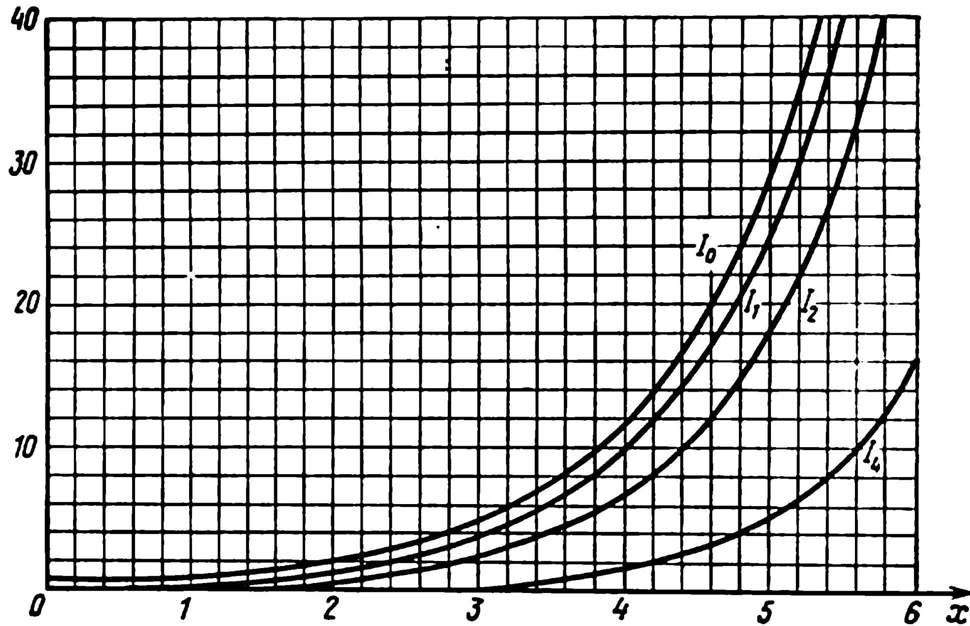


Fig. 11

Relations de récurrence et formules de dérivation:

$$I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}I_\nu(z);$$

$$I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)=2I'_\nu(z);\quad I'_0(z)=I_1(z);$$

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z);$$

$$K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2K'_\nu(z);\quad K'_0(z)=-K_1(z).$$

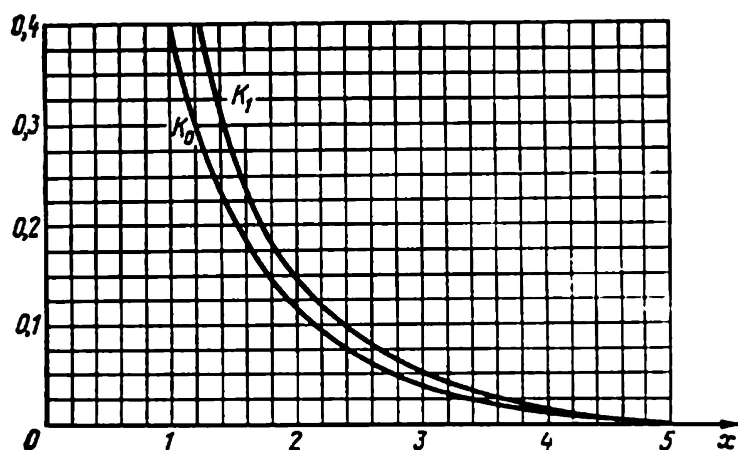


Fig. 12

Fonctions $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$ d'ordre demi-entier :

$$I_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{ch} z \quad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$K_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

On voit sur les figures 11 et 12 les courbes représentatives des fonctions $I_n(x)$ et $K_n(x)$ pour certaines valeurs de n.

CHAPITRE IV

FONCTIONS DU TYPE HYPERGÉOMÉTRIQUE

Dans ce chapitre seront étudiées les fonctions du type hypergéométrique. Ce sont en particulier les fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, les fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha, \gamma, z)$ et les fonctions d'Hermite $H_\nu(z)$. Les fonctions du type hypergéométrique ont été introduites dans le chapitre II en tant que généralisation des polynômes orthogonaux classiques. Elles sont cependant intéressantes aussi pour elles-mêmes, parce que de nombreuses équations de la physique mathématique et de la mécanique quantique se ramènent à des équations du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\, y'' + \tau(z)\, y' + \lambda y = 0,$$

où $\sigma(z)$ et $\tau(z)$ sont des polynômes de degré non supérieur au deuxième et au premier respectivement et λ est une constante.

Nous avons déjà étudié les propriétés élémentaires des fonctions du type hypergéométrique au § 10. Dans ce chapitre nous procédons à une analyse plus détaillée de ces fonctions.

§ 27. Fonctions hypergéométriques

1. Définition de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Comme on l'a montré au § 10, dans le cas où $\sigma(z)$ est un polynôme de second degré à racines distinctes, l'équation du type hypergéométrique se ramène à l'équation hypergéométrique

$$z(1-z)\, y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\, z]\, y' - \alpha\beta y = 0 \tag{1}$$

qu'il est possible d'écrire sous forme autoconjuguée:

$$\frac{d}{dz}\left[\sigma(z)\, \rho(z)\, \frac{dy}{dz}\right] + \lambda\rho y = 0. \tag{2}$$

Ici $\sigma(z) = z(1-z)$, $\lambda = -\alpha\beta$, et la fonction $\rho(z)$ est définie à l'aide de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz}[\sigma(z)\, \rho(z)] = \tau(z)\, \rho(z), \quad \tau(z) = \gamma - (\alpha+\beta+1)\, z.$$

Dans le cas considéré $\rho(z) = z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}$.

La solution particulière de l'équation (1) est de la forme (voir § 10)

$$y(z) = \frac{A}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^\nu(s)\, \rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\, ds.$$

Ici A est la constante de normalisation ; ν est la constante liée à $\lambda = -\alpha\beta$ par la relation

$$\lambda = -\nu\left[\tau'(z) + \frac{\nu-1}{2}\sigma''(z)\right].$$

Dans notre cas $\nu = -\alpha$ (ou $\nu = -\beta$). Le contour C est choisi de la condition

$$\left.\frac{\sigma^{\nu+1}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\right|_{s=s_1,\,s_2} = 0 \qquad (3)$$

(s_1 et s_2 sont les extrémités de C).

Ainsi donc, le contour C étant choisi convenablement, l'équation hypergéométrique (1) a pour solution particulière

$$y(z) = \frac{A}{z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}} \int_C s^{\gamma-\alpha-1}(1-s)^{\beta-\gamma}(s-z)^{\alpha-1}\,ds. \qquad (4)$$

Comme on voit de (3), on peut choisir en qualité des extrémités du contour C les points $s = 0$, $s = 1$, $s = z$ ou $s = \infty$ en fonction des propriétés des solutions de l'équation hypergéométrique qu'on se propose d'étudier. En particulier, si l'on veut connaître le comportement des solutions de l'équation (1) pour $z \to 0$, il est commode de prendre pour le contour C un segment de droite reliant les points $s = 0$ et $s = z$. La condition (3) aux extrémités d'un tel contour sera remplie si l'on exige que l'inégalité $\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 1$ soit vérifiée. Posant dans (4) $s = zt$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$, nous obtiendrons la solution particulière de l'équation hypergéométrique sous la forme

$$y(z) = f(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$
$$= C(\alpha, \beta, \gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}(1-zt)^{\beta-\gamma}\,dt.$$

Il est commode de choisir la constante de normalisation $C(\alpha, \beta, \gamma)$ de la condition $y(0) = 1$. Cela entraîne

$$C(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Comme on a déjà vu au § 10, l'équation hypergéométrique admet comme autres solutions particulières les fonctions

$$z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, z),$$
$$z^{1-\gamma} f(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z),$$
$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z).$$

Parmi ces solutions, la fonction

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z)$$

est de la forme la plus simple, cette fonction ne comportant pas, en tant que facteurs, de puissances de z et de $1 - z$ devant l'intégrale. Cette fonction est dite *fonction hypergéométrique* et désignée par $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, c.-à-d. que pour $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} (\gamma - \alpha) > 1$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\,dt. \tag{5}$$

La fonction $(1 - zt)^{-\beta}$ admet des points de branchement pour $1 - zt = 0$, c.-à-d. pour $z = 1/t$. C'est pourquoi la ligne $z > 1$ $(\arg z = 0)$ est la ligne singulière de l'intégrale figurant dans (5). Pour que la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ soit uniforme, il suffit de faire une coupure le long de l'axe réel pour $z \geqslant 1$ et de choisir celle des branches de la fonction $(1 - zt)^{-\beta}$ qui est égale à l'unité quand $z = 0$. Pour un tel choix $|\arg(1 - zt)| < \pi$.

Pour étudier l'analyticité de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, évaluons la convergence de l'intégrale dans le second membre de (5). Si $\operatorname{Re} \alpha \geqslant \mu > 0$ et $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \geqslant \nu > 0$, on a

$$|t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}| \leqslant t^{\mu-1}(1-t)^{\nu-1}.$$

Pour évaluer l'expression $|(1 - zt)^{-\beta}|$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, nous aurons recours aux inégalités (8) du § 19. Soit $|z| \leqslant R$. Puisque

$$|1 - zt| \leqslant 1 + |zt| \leqslant 1 + R,$$

on peut poser dans l'estimation (8) du § 19 $a = -zt$, $b = -\beta$, $C_2 = 1 + R$. Pour obtenir l'expression de C_1, envisageons deux cas: 1) $|z| \leqslant 1 - \delta$; 2) $|z| > 1 - \delta$, $\delta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta$. Dans le premier cas on peut choisir $C_1 = \delta$ en vertu de l'inégalité

$$|1 - zt| \geqslant 1 - |zt| \geqslant \delta.$$

Dans le deuxième cas, en vertu de l'inégalité $|\arg(-zt)| \leqslant \pi - \delta$, on peut se servir de la formule (9) du § 19, c.-à-d. poser $C_1 = \sin \delta$. Ayant recours à l'estimation (8) du § 19, dans tous les cas considérés pour $|\beta| \leqslant \beta_0$ nous aurons $|(1 - zt)^{-\beta}| \leqslant M$, où M est une constante.

Puisque l'intégrale $\int_0^1 t^{\mu-1}(1 - t)^{\nu-1}\,dt$ converge pour $\mu > 0$ et $\nu > 0$, on a, sur la base des estimations ci-dessus, la convergence uniforme de l'intégrale dans (5) pour $\operatorname{Re} \alpha \geqslant \mu > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \geqslant \nu > 0$, $|z| \leqslant R$ et pour les conditions supplémentaires suivantes imposées à la variable z: si $|z| > 1 - \delta$, alors $\delta \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \delta$. C'est pourquoi, en vertu du caractère arbitraire des constantes μ, ν, R, β_0 et de la convergence uniforme de l'intégrale (5) dans le domaine considéré, la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ sera une fonction analytique de

chacune des variables pour les valeurs fixes des autres si les conditions $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \alpha > 0$ ont été remplies et si l'on a fait la coupure dans le plan de la variable complexe z le long de l'axe réel pour $z \geqslant 1$.

Conformément au principe de prolongement analytique, la fonction $S(\alpha, \beta, \gamma, z)$ satisfait à l'équation hypergéométrique (1) (voir théorème 2 du § 1).

La dérivée de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ est facile à calculer à l'aide de la représentation intégrale (3):

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\beta \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta-1}\,dt =$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z).$$

L'équation différentielle (1) peut donc s'écrire sous la forme

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = (\alpha+1)(\beta+1)\, z(1-z) \times$$
$$\times \varphi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, z) +$$
$$+ [\gamma - (\alpha+\beta+1) z]\, \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z), \qquad (6)$$

où

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

Puisque la relation (6) établit la liaison entre les fonctions hypergéométriques pour lesquelles la différence $\gamma - \alpha$ est conservée, elle permet d'obtenir le prolongement analytique de la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ dans le domaine $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ pour toute valeur du paramètre α si l'on diminue de proche en proche la valeur de α d'une unité. Au numéro suivant la restriction $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ sera levée.

2. Relations de récurrence. Les fonctions hypergéométriques satisfont à de nombreuses relations de récurrence. Rappelons-nous par exemple les relations obtenues au § 10 pour des fonctions arbitraires du type hypergéométrique. On peut établir des relations linéaires plus générales entre trois fonctions quelconques $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z)$, $F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, z)$ dans le cas où les différences $\alpha_i - \alpha_k$, $\beta_i - \beta_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ sont des entiers.

Considérons une combinaison linéaire arbitraire de fonctions hypergéométriques

$$\sum_{i=1}^{3} C_i F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, z).$$

Montrons qu'il est possible de choisir les fractions rationnelles $C_i = C_i(z)$ de telle façon que la combinaison en question s'annule.

13—01174

A cet effet, utilisons la représentation intégrale (5) pour les fonctions hypergéométriques:

$$\sum_{i=1}^{3} C_i F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z) = \int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0} P(t)\, dt. \qquad (7)$$

Ici α_0 et $\gamma_0 - \alpha_0$ sont les valeurs de α_i et de $\gamma_i - \alpha_i$ qui ont la partie réelle la plus petite, et β_0 est la valeur de β_i qui a la partie réelle la plus grande:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{3} C_i \frac{\Gamma(\gamma_i)}{\Gamma(\alpha_i)\Gamma(\gamma_i-\alpha_i)} t^{\alpha_i-\alpha_0}(1-t)^{(\gamma_i-\alpha_i)-(\gamma_0-\alpha_0)}(1-zt)^{\beta_0-\beta_i}.$$

Les différences $\alpha_i - \alpha_0$, $(\gamma_i - \alpha_i) - (\gamma_0 - \alpha_0)$, $\beta_0 - \beta_i$ étant des entiers non négatifs, la fonction $P(t)$ est un polynôme par rapport à la variable t. Choisissons les coefficients C_i de sorte que la fonction à intégrer prenne la forme de la dérivée par rapport à la variable t d'une fonction qui a la même forme que l'expression sous le signe d'intégration dans (7), c.-à-d.

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}(1-zt)^{-\beta_0} P(t) = \frac{d}{dt}[t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0} Q(t)], \qquad (8)$$

où $Q(t)$ est un polynôme. Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{3} C_i F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z) = t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}(1-zt)^{1-\beta_0} Q(t)\Big|_0^1.$$

Puisque $\operatorname{Re}(\gamma_0 - \alpha_0) = \min \operatorname{Re}(\gamma_i - \alpha_i) > 0$ et que $\operatorname{Re}\alpha_0 = \min \operatorname{Re}\alpha_i > 0$, la substitution s'annule, et pour les coefficients C_i ainsi choisis on a la relation linéaire

$$\sum_{i=1}^{3} C_i F(\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ z) = 0. \qquad (9)$$

Montrons qu'il est toujours possible de choisir les coefficients du polynôme $Q(t)$ et les coefficients C_i de telle façon que l'égalité (8) soit bien vérifiée. En comparant le premier et le deuxième membre de cette égalité, on s'assure aisément que le degré du polynôme $Q(t)$ est de deux unités inférieur à celui du polynôme $P(t)$. Egalant les coefficients des différentes puissances de t dans le premier et le deuxième membre de l'égalité (8), nous obtenons un système d'équations linéaires par rapport aux coefficients inconnus du polynôme

$Q(t)$ et aux coefficients C_i. Il est facile de voir que le nombre d'inconnues sera alors d'une unité supérieur au nombre d'équations. Pour que la solution de ce système soit unique, il suffit de considérer le coefficient du degré supérieur du polynôme $Q(t)$ comme connu. Afin de simplifier les calculs ultérieurs, admettons que ce coefficient soit égal à $\frac{\Gamma(\gamma_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\gamma_0-\alpha_0)}$. Puisque, dans le système d'équations obtenu, les coefficients des inconnues sont des polynômes par rapport à la variable z, les inconnues C_i seront des fractions rationnelles de la variable z.

Cherchons à établir, à titre d'exemple, la relation existant entre les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et $F(\alpha, \beta, \gamma \pm 1, z)$. On a dans ce cas

$$\alpha_0 = \alpha_i = \alpha, \quad \beta_0 = \beta_i = \beta,$$

$$\gamma_1 = \gamma - 1, \ \gamma_2 = \gamma, \ \gamma_3 = \gamma + 1, \ \gamma_0 = \gamma - 1,$$

$$P(t) = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}[C_1(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1) + \\ + C_2(\gamma-1)(\gamma-\alpha)(1-t) + C_3\gamma(\gamma-1)(1-t)^2], \quad (10)$$

et le degré du polynôme $Q(t)$ sera égal à zéro, c.-à-d.

$$Q(t) = \frac{\Gamma(\gamma_0)}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(\gamma_0-\alpha_0)} = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-1)}.$$

L'égalité (8) prendra donc la forme

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-2}(1-zt)^{-\beta}P(t) = \\ = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-1)}\frac{d}{dt}[t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{1-\beta}],$$

d'où

$$P(t) = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-1)} \times \\ \times [\alpha(1-t)(1-zt) - (\gamma-\alpha-1)t(1-zt) + (1-\beta)t(1-t)].$$

Portant l'expression obtenue pour $P(t)$ dans (10) et égalant les coefficients des différentes puissances de t, on trouve

$$C_1 = (\gamma-\alpha-1)(z-1),$$

$$C_2 = \frac{\gamma-\alpha-1}{\gamma-1}[(\alpha+\beta-2\gamma+2)z+\gamma-1],$$

$$C_3 = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha-1)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-1)}z.$$

On a donc en définitive

$$\gamma(\gamma-1)(z-1)F(\alpha, \beta, \gamma-1, z) + \\ + \gamma[(\alpha+\beta-2\gamma+2)z+\gamma-1]F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \\ + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha, \beta, \gamma+1, z) = 0. \quad (11)$$

La relation (11) permet de prolonger analytiquement la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ à des valeurs arbitraires de γ en diminuant successivement les valeurs de γ d'une unité. Dans le cas d'un tel prolongement, la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ devient une fonction analytique uniforme de la variable z et des paramètres α, β, γ pour des valeurs quelconques de α, β, γ dans le plan présentant une coupure le long de l'axe réel pour $z \geqslant 1$. C'est pourquoi la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \Gamma(\gamma)\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ ne peut avoir de singularités que pour $\gamma = -n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

3. Série hypergéométrique. Il est facile d'obtenir le développement en série de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ suivant les puissances de z à l'aide de la représentation intégrale (5) et du développement en série de la fonction $(1 - zt)^{-\beta}$:

$$(1 - zt)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (zt)^n}{n!}, \quad |zt| < 1, \tag{12}$$

où

$$(\beta)_n = \frac{\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\beta)} = \beta(\beta + 1) \ldots (\beta + n - 1).$$

Si $|z| < 1$, la série (12) converge uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, et on peut intervertir la sommation et l'intégration dans (5). Il vient alors pour $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n \int_0^1 t^{n+\alpha-1} (1 - t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n\, n!} z^n. \tag{13}$$

Remarquons que $F(\alpha, \beta, \gamma, 0) = 1$.

La série (13) est dite *série hypergéométrique*. L'étude de la convergence de cette série à l'aide du critère de d'Alembert montre qu'elle converge uniformément par rapport à α, β, γ, z pour $|z| \leqslant q < 1$ en tout domaine fermé des variables α, β, γ ne contenant pas de valeurs négatives entières ni de valeurs nulles de γ. Pour cette raison la série hypergéométrique représente une fonction analytique des variables α, β, γ, z pour $|z| < 1$, $\gamma \neq -k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ et, en vertu du principe de prolongement analytique, le développement (13) reste vrai dans tout le domaine indiqué des valeurs de α, β, γ, z.

Notons une égalité évidente découlant du développement (13):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z).$$

4. Relations fonctionnelles. Nous avons obtenu une solution particulière de l'équation hypergéométrique: la fonction $y_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Comme il a été montré au § 10, l'équation (1) admet comme autres solutions particulières les fonctions

$$y_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z),$$
$$y_3(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z),$$
$$y_4(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ z).$$

Etant donné que l'équation hypergéométrique n'admet que deux solutions linéairement indépendantes, entre les fonctions $y_i(z)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ doivent exister des relations linéaires. Quand $\gamma \neq 1$, les fonctions $y_1(z)$ et $y_2(z)$ sont linéairement indépendantes, vu leur comportement différent pour $z \to 0$. Pour cette raison, lorsque $\gamma \neq 1$, on peut représenter les fonctions $y_3(z)$ et $y_4(z)$ comme une combinaison linéaire des fonctions $y_1(z)$ et $y_2(z)$. La comparaison du comportement de ces fonctions pour $z \to 0$ donne

$$y_3(z) = y_1(z)\ (\operatorname{Re}\gamma > 1),\quad y_4(z) = y_2(z)\ (\operatorname{Re}\gamma < 1),$$

c.-à-d. que pour $\operatorname{Re}\gamma > 1$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z) \tag{14}$$

et pour $\operatorname{Re}\gamma < 1$

$$F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z) = \\ = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ z). \tag{15}$$

Le principe de prolongement analytique permet de lever les restrictions imposées au paramètre γ. Notons que la relation (15) découle de (14). Pour les valeurs de la fonction $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ on prend dans (14) la branche qui est égale à l'unité lorsque $z = 0$, c.-à-d. $|\arg(1-z)| < \pi$.

La relation (14) est un exemple de relation fonctionnelle entre les fonctions hypergéométriques dépendant d'une seule et même variable z. Les fonctions hypergéométriques vérifient également nombre de relations fonctionnelles entre des fonctions hypergéométriques de variables différentes. Pour obtenir de pareilles relations, nous allons utiliser la représentation de la solution de l'équation hypergéométrique sous la forme (4), en choisissant les types suivants de contours C: a) segment de droite entre les points $s = z$ et $s = 1$; b) demi-droite $\arg s = \arg z$, $|s| \geqslant |z|$. Grâce à ces contours, on obtient les solutions qui ont un comportement simple pour $z \to 1$ et $z \to \infty$. Posant dans (4) $s = 1 - t(1-z)$ dans le premier cas et $s = z/t$ dans le deuxième, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$, on obtient

les solutions particulières suivantes de l'équation hypergéométrique:

$$y(z)=A_1z^{1-\gamma}\int_0^1[1-t(1-z)]^{\gamma-\alpha-1}t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-1}\,dt\sim$$

$$\sim z^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-z),$$

$$y(z)=A_2z^{\beta-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{-\beta}(1-t)^{\alpha-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\beta-\gamma}dt\sim$$

$$\sim z^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\ \gamma-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right)$$

($\sim$ est le symbole de proportionnalité).

Ayant recours à la relation fonctionnelle (14), on arrive à simplifier les expressions obtenues, ce qui nous donne les solutions suivantes de l'équation hypergéométrique:

$$y(z)=F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-z),$$

$$y(z)=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right).$$

Comme il a été montré plus haut, pour $\gamma\neq 1$ l'équation hypergéométrique a pour deux solutions linéairement indépendantes les fonctions

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)\ \text{et}\ z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z).$$

Appliquant une méthode analogue pour la recherche de la seconde solution dans le cas des fonctions $F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-z)$ et $z^{-\alpha}F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ 1/z)$, on obtient les couples suivants de solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)\ \text{et}\ z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z)$$
$$(\gamma\neq 1);$$
$$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-z)$$

et

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-z)$$
$$(\gamma-\alpha-\beta\neq 0);$$
$$z^{-\alpha}F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ 1/z)$$

et

$$z^{-\beta}F(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ 1/z)$$
$$(\alpha\neq\beta).$$

Puisque l'équation hypergéométrique n'admet que deux solutions linéairement indépendantes au plus, il est possible de mettre toute

fonction de chaque couple sous la forme d'une combinaison linéaire de tout autre couple de solutions. Grâce à ce procédé, on obtient les différentes relations fonctionnelles entre les fonctions hypergéométriques. Soient $y_1(z)$ et $y_2(z)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1). Développant une solution arbitraire de l'équation hypergéométrique $y(z)$ suivant les fonctions $y_1(z)$ et $y_2(z)$, on a

$$y(z) = C_1 y_1(z) + C_2 y_2(z).$$

Notons une simple propriété suivante des coefficients du développement C_1 et C_2: si dans un certain domaine de variation des variables α, β, γ, z les fonctions $y(z)$, $y_1(z)$ et $y_2(z)$ sont des fonctions analytiques de α, β, γ, z, les coefficients $C_1 = C_1(\alpha, \beta, \gamma)$ et $C_2 = C_2(\alpha, \beta, \gamma)$ seront aussi des fonctions analytiques dans ce domaine.

Cette propriété découle de la forme explicite des coefficients C_1 et C_2:

$$C_1 = \frac{W[y, y_2]}{W[y_1, y_2]}, \qquad C_2 = \frac{W[y_1, y]}{W[y_1, y_2]}.$$

Ici

$$W[f, g] = f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x)$$

est le wronskien, qui n'est pas nul pour les fonctions linéairement indépendantes. Pour rechercher les coefficients C_1 et C_2, il suffit donc de trouver leurs expressions pour certaines restrictions supplémentaires imposées aux paramètres et d'appliquer ensuite le principe de prolongement analytique.

Trouvons d'abord le développement de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ suivant les fonctions hypergéométriques de la variable $1 - z$:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = C_1(\alpha, \beta, \gamma)\, F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) + \\ + C_2(\alpha, \beta, \gamma)(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \times \\ \times F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z). \quad (16) \end{aligned}$$

A l'aide de la relation fonctionnelle (14), on établit la liaison entre les coefficients C_1 et C_2:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z) = \\ = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} [C_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma) \times \\ \times F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z) + \\ + C_2(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma)(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} \times \\ \times F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z)]. \end{aligned}$$

On en tire

$$C_2(\alpha, \beta, \gamma) = C_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma).$$

Pour déterminer le coefficient C_1, supposons d'abord que $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ et que $\operatorname{Re}\beta < 0$. Passons dans le développement (16) à la limite pour $z \to 1$ et utilisons la représentation intégrale (5). Comme, pour les restrictions indiquées imposées aux paramètres, on a

$$\lim_{z\to 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

alors, en vertu de $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$, on obtient

$$C_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

d'où

$$C_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Conformément au principe de prolongement analytique, les expressions obtenues de C_1 et C_2 restent vraies, quelles que soient les valeurs des paramètres. De cette façon,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \times F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z). \qquad (17)$$

Développons maintenant la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ suivant les fonctions hypergéométriques de la variable $1/z$. A cet effet, trouvons d'abord, à l'aide de la représentation intégrale (5), le comportement asymptotique de la fonction hypergéométrique pour $z \to \infty$. Si $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ et $\operatorname{Re}\beta < 0$, alors

$$\lim_{z\to\infty} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{(-z)^{-\beta}} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}. \qquad (18)$$

Ici $|\arg(-z)| < \pi$. Conformément à (18), il est plus commode de développer la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ non pas suivant les fonctions

$$z^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right),$$

$$z^{-\beta}F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{z}\right)$$

mais suivant les fonctions

$$(-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right),$$

$$(-z)^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right).$$

On a

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)= \\ = D_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma)(-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\frac{1}{z}\right)+ \\ + D_2(\alpha,\ \beta,\ \gamma)(-z)^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right). \qquad (19)$$

Puisque $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z)$, on a $D_1(\alpha, \beta, \gamma) = D_2(\beta, \alpha, \gamma)$. Pour déterminer le coefficient $D_2(\alpha, \beta, \gamma)$, supposons d'abord que $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ et que $\operatorname{Re}\beta < 0$. Passons dans le développement (19) à la limite pour $z \to \infty$ et faisons usage de (18). Il en résulte

$$D_2(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

d'où

$$D_1(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

En vertu du principe du prolongement analytique, les expressions obtenues de D_1 et de D_2 restent vraies, quelles que soient les valeurs des paramètres. De cette façon,

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)= \\ =\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right)+ \\ +\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right). \qquad (20)$$

Ici $|\arg(-z)| < \pi$.

A l'aide des développements (17) et (20), on trouve facilement la forme de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ pour $z \to 1$ et $z \to \infty$ en utilisant les séries pour les fonctions hypergéométriques des variables $1 - z$ ou $1/z$.

Par la combinaison des relations (17), (20) et (14), on peut obtenir évidemment bon nombre d'autres relations fonctionnelles. En particulier, il est facile d'obtenir les développements qui sont, dans un certain sens, inverses par rapport aux relations (17) et (20), c.-à-d. les développements d'une quelconque des fonctions de la variable $1 - z$ ou $1/z$ suivant les fonctions

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z) \text{ et } z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z).$$

A titre d'exemple, proposons-nous d'obtenir les développements des fonctions $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)$ et $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z)$. Pour le faire, il suffit de remplacer dans la relation (17) les quantités α, β, γ, z par $\alpha, \beta, \alpha+\beta-$ $-\gamma+1, 1-z$ ou par $\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z$. Il en résulte

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z)= \\ =\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)} F(\alpha, \beta, \gamma, z)+ \\ +\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z), \quad (21)$$

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)= \\ =(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\left[\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z)+\right. \\ \left.+\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} z^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, z)\right].$$

Appliquant au second membre de la dernière égalité la relation fonctionnelle (14), mettons-la sous la forme

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)= \\ =\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} F(\alpha, \beta, \gamma, z)+ \\ +\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\gamma-1)}{\beta(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z). \quad (22)$$

Les relations de la forme (17), (20) et les relations analogues obtenues par combinaison des relations (17), (20) et (14) donnent la possibilité d'exprimer la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ à l'aide des fonctions hypergéométriques des variables $1-z$, $1/z$, $1/(1-z)$, $1-1/z$, $1/(1-1/z) =$ $= z/(z-1)$. A l'aide des séries hypergéométriques suivant les variables mentionnées, cela permet de réaliser le prolongement analytique de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ dans toute partie du plan complexe muni d'une coupure le long de l'axe réel $(1, \infty)$, à l'exception des points d'intersection des cercles $|z| = 1$ et $|1-z| = 1$, car on a dans ce cas $|z| = |1-z| = |1-1/z| = 1$.

5. Cas particuliers. La fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ n'étant pas définie dans le cas où $\gamma = -k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, les relations fonctionnelles déduites au numéro précédent peuvent perdre le sens étant donné certaines relations entre les paramètres.

Si $\alpha = -m$ $(m = 0, 1, \ldots)$, la série hypergéométrique (13) s'interrompt, et la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ sera un polynôme de degré m par rapport à z. Ce polynôme a un sens aussi pour $\gamma = -k$ si

$m \leqslant k$, car $(\gamma)_n = (-k)_n \neq 0$ pour $n \leqslant m$. Il en est de même, évidemment, pour $\beta = -m$. Donc, il ne reste qu'à envisager les cas où les relations fonctionnelles portent sur les fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ pour $\gamma = -k$, $\alpha \neq 0, -1, \ldots, -k$, $\beta \neq 0, -1, \ldots, -k$.

Pour que les relations fonctionnelles aient un sens dans ces cas aussi, il suffit de passer de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ à la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ qui, comme il a été montré plus haut, a un sens quelle que soit la valeur de γ, y compris pour $\gamma = -k$.

Considérons à titre d'exemple la relation (21). Utilisant la formule de complément pour la fonction gamma, on peut écrire cette relation sous la forme suivante:

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma}\left[\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{z^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]. \qquad (23)$$

Cette relation devient indéterminée pour $\gamma = n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, car $\sin \pi\gamma = 0$ quand $\gamma = n$. Puisque la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z)$ figurant dans le premier membre de l'égalité (23) est une fonction analytique de γ, on a la limite finie pour $\gamma \to n$ lorsque l'expression entre crochets s'annule pour $\gamma = n$, c.-à-d.

$$\varphi(\alpha, \beta, n, z) = \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{1-n} \times$$
$$\times \varphi(\alpha-n+1, \beta-n+1, 2-n, z). \qquad (24)$$

On voit de la formule (24) que dans les cas où une des fonctions $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ et $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ devient indéterminée, les fonctions

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) \quad \text{et} \quad z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$$

s'avèrent linéairement dépendantes.

La valeur de $\gamma = n$ dans le second membre de (23) est un point singulier éliminable. Passons à la limite dans (23) pour $\gamma \to n$. Utilisant l'égalité (24) et calculant les limites par la règle de L'Hospital, nous aurons

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\beta-n+1)} \{\varphi(\alpha, \beta, n, z)[\psi(\alpha)+\psi(\beta)] +$$
$$+ \Phi(\alpha, \beta, n, z)\}. \qquad (25)$$

Ici $\psi(z)$ est la dérivée logarithmique de la fonction gamma,

$$\Phi(\alpha, \beta, n, z) = \varphi(\alpha, \beta, n, z) \ln z + \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\gamma}\right) \varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)\Big|_{\gamma=n} + \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{1-n} \frac{\partial\varphi(\alpha-n+1, \beta-n+1, \gamma, z)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=2-n}. \quad (26)$$

Comme, en vertu de (14),

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z) = z^{1-n}\varphi(\alpha-n+1, \beta-n+1, \alpha+\beta-n+1, 1-z),$$

on a

$$\Phi(\alpha, \beta, n, z) = \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{1-n}\Phi(\alpha-n+1, \beta-n+1, 2-n, z) + \varphi(\alpha, \beta, n, z)\,[\psi(\alpha-n+1) - \psi(\alpha) + \psi(\beta-n+1) - \psi(\beta)].$$

Répétant dans les cas particuliers des transformations analogues dans d'autres relations fonctionnelles pour les fonctions hypergéométriques, on aboutit toujours aux relations existant entre certaines fonctions hypergéométriques et les fonctions $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$.

Puisque la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \alpha+\beta-n+1, 1-z)$ est solution de l'équation hypergéométrique (1) pour $\gamma = n$, la fonction $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ sera aussi solution de cette équation quels que soient α et β, sauf pour certaines valeurs isolées de α et de β pour lesquelles les coefficients dans (25) ou bien la fonction $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ elle-même admettent une singularité.

La fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$ étant une fonction analytique de chacune des variables α, β, γ, z, la fonction $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ sera, en vertu de (26), une fonction analytique de chacune des variables α, β et z s

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)} \neq 0.$$

Par conséquent, en vertu du principe du prolongement analytique, la fonction $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ sera solution de l'équation hypergéométrique (1) pour les valeurs indiquées de α et de β. En partant des considérations analogues nous constatons que la fonction $z^{1-n}\Phi(\alpha-n+1, \beta-n+1, 2-n, z)$ sera solution de l'équation hypergéométrique si

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \neq 0.$$

Les raisonnements ci-dessus nous permettent de construire le système complet de solutions de l'équation hypergéométrique quel que soit γ. En effet, si $\gamma \neq 1$ et que les fonctions $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ et

$z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$ aient un sens, on peut les considérer comme deux solutions linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique. Par contre, si une de ces fonctions devient indéterminée, il convient de la remplacer par $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ pour $\gamma = n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ou par $z^{1-n}\Phi(\alpha-n+1, \beta-n+1, 2-n, z)$ pour $\gamma = n \leqslant 0$ $(n = 0, -1, \ldots)$. Si $\gamma = 1$, l'équation hypergéométrique admet comme solutions les fonctions $F(\alpha, \beta, 1, z)$ et $\Phi(\alpha, \beta, 1, z)$. Il est facile de s'assurer que les cas considérés sont exhaustifs. On vérifie aisément l'indépendance linéaire des couples de solutions indiqués en comparant leur comportement pour $z \to 0$.

Cherchons le développement de la fonction $\Phi(\alpha, \beta, n, z)$ suivant les puissances de z pour $n > 0$ à l'aide des développements correspondants pour la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)$. On a pour $|z| < 1$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!\,\Gamma(\gamma+k)} z^k,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\varphi(\alpha, \beta, \gamma, z)\Big|_{\gamma=n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k z^k}{k!\,(n-1+k)!}[\psi(\alpha+k)-\psi(\alpha)+$$

$$+\psi(\beta+k)-\psi(\beta)-\psi(n+k)],$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi(\alpha-n+1, \beta-n+1, \gamma, z) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha-n+1)_k (\beta-n+1)_k}{k!} \frac{\psi(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma+k)} z^k.$$

Si dans la dernière somme $\gamma + k$ est un entier négatif, de sorte que $\gamma + k = -s$ $(s = 0, 1, \ldots)$, alors

$$\frac{\psi(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma+k)} = (-1)^{s+1} s!.$$

Il en résulte que dans le cas où $\gamma = 2 - n \leqslant 0$ il convient de diviser la série pour la fonction $\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi(\alpha-n+1, \beta-n+1, \gamma, z)\,|_{\gamma=2-n}$ en deux parties dont l'une contiendra les termes pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$ et l'autre pour $k \geqslant n-1$. Remplaçant l'indice de sommation k dans la première somme par $n-1-k$ et dans la deuxième par $n-1+k$, on a en définitive

$$\frac{\Gamma(\alpha-n+1)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} z^{1-n} \frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi(\alpha-n+1, \beta-n+1, \gamma, z)\Big|_{\gamma=2-n} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (k-1)!\, z^{-k}}{(n-1-k)!\,(\alpha-k)_k\,(\beta-k)_k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k\, \psi(k+1)}{(n-1+k)!\,k!} z^k.$$

L'expression obtenue reste vraie aussi pour $n = 1$ si la première somme est supposée égale à zéro. Ainsi donc, on a pour $n = 1, 2, \ldots$

$$\Phi(\alpha, \beta, n, z) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (k-1)!}{(n-1-k)!\,(\alpha-k)_k\,(\beta-k)_k} z^{-k} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!\,(n-1+k)!} z^k [\ln z + \psi(\alpha+k) - \psi(\alpha) +$$

$$+\psi(\beta+k) - \psi(\beta) - \psi(n+k) - \psi(k+1)]. \qquad (27)$$

§ 28. Fonctions hypergéométriques dégénérées

1. Définition des fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$. Comme il a été montré au § 10, dans le cas où $\sigma(z)$ est un polynôme du premier degré, l'équation du type hypergéométrique se réduit à une équation hypergéométrique dégénérée

$$zy'' + (\gamma - z)\,y' - \alpha y = 0. \qquad (1)$$

La solution particulière de l'équation (1) est de la forme

$$y(z) = \frac{A}{\rho(z)} \int_C \frac{\sigma^{\nu}(s)\,\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}}\,ds$$

(A est la constante de normalisation). Dans le cas considéré $\sigma(z) = z$, $\nu = -\alpha$, et la fonction $\rho(z)$ se définit à l'aide de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz}[\sigma(z)\,\rho(z)] = \tau(z)\,\rho(z), \quad \tau(z) = \gamma - z,$$

ce qui donne $\rho(z) = z^{\gamma-1}e^{-z}$. C'est pourquoi

$$y(z) = \frac{A}{z^{\gamma-1}} \int_C s^{\gamma-\alpha-1}(z-s)^{\alpha-1} e^{z-s}\,ds.$$

Le contour C est choisi de façon à remplir la condition

$$s^{\gamma-\alpha}(z-s)^{\alpha-1} e^{-s}\big|_{s=s_1,\,s_2} = 0$$

(s_1 et s_2 sont les extrémités du contour C). Compte tenu des restrictions correspondantes imposées aux paramètres α et γ, pour les extrémités du contour on peut prendre les points $s = 0, z, \infty$. Choisissant en qualité de contour C le segment de droite $s = z(1-t)$, $0 < t < 1$, passant par les points $s_1 = 0$ et $s_2 = z$, ainsi que la demi-droite $s = z + t$, $0 < t < \infty$, on arrive aux solutions suivantes de

l'équation hypergéométrique dégénérée:

$$y_1(z) = A_1 \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt}\,dt, \quad \operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 1;$$

$$y_2(z) = A_2 z^{-\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 1.$$

La fonction $y_1(z)$ a le comportement simple pour $z \to 0$, et la fonction $y_2(z)$ pour $z \to \infty$. En effet, s'il est possible d'effectuer le passage à la limite correspondant sous le signe d'intégration, alors

$$\left.\begin{aligned} y_1(0) &= A_1 \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}, \\ \lim_{z\to\infty} y_2(z) z^\alpha &= A_2 \Gamma(\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Il est commode de choisir les constantes de normalisation A_1 et A_2 de telle façon que les seconds membres des égalités (2) soient égaux à l'unité. On obtient en résultat les solutions suivantes de l'équation (1):

$$y_1(z) = F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt}\,dt, \tag{3}$$

$$y_2(z) = G(\alpha, \gamma, z) = \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1} dt. \tag{4}$$

La fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ est dite *fonction hypergéométrique dégénérée* (ou fonction hypergéométrique dégénérée de première espèce), et la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$, *fonction hypergéométrique dégénérée de seconde espèce*. Pour que la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ soit uniforme, nous admettrons dans (4) que

$$\left|\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)\right| < \pi, \quad |\arg z| < \pi.$$

On a introduit les fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$ pour les restrictions suivantes imposées aux paramètres: $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 1$ pour $F(\alpha, \gamma, z)$ et $\operatorname{Re}\alpha > 1$ pour $G(\alpha, \gamma, z)$. Pour rechercher le prolongement analytique de ces fonctions dans un domaine plus vaste de valeurs des paramètres, ainsi que pour démontrer les relations (2), étudions la convergence des intégrales déterminant les fonctions $y_1(z) = F(\alpha, \gamma, z)$ et $y_2(z) = G(\alpha, \gamma, z)$. On étudie la convergence de l'intégrale (3) par la même méthode que pour l'intégrale (5) du § 27 déterminant la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ en remarquant que pour $\operatorname{Re} z \leqslant R$ on a $|e^{zt}| \leqslant e^R$. A la suite de cette étude on est conduit à constater que la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ est une fonction analytique

de chacune des variables α, γ, z, les valeurs des deux autres variables étant fixes, si $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$.

Considérons la représentation intégrale (4) pour la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$. La fonction $(1 + t/z)^{\gamma-\alpha-1}$ passe par des points de branchement quand $z = -t$ $(0 < t < \infty)$. Pour cette raison la ligne $\arg z = \pm\pi$ est la ligne singulière de l'intégrale (4). Pour que la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ soit uniforme, il suffit de faire une coupure le long de l'axe réel pour $z \leqslant 0$, c.-à-d. de poser $|\arg z| < \pi$. Passons à l'étude de la convergence de l'intégrale pour $G(\alpha, \gamma, z)$. Afin d'évaluer l'expression $\left|\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}\right|$ pour $0 < t < \infty$, utilisons les relations (8) et (9) du § 19. Si $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ et $|z| \geqslant R$, alors, en posant dans (8) $a = t/z$, $b = \gamma - \alpha - 1$, nous avons $|\arg a| \leqslant \pi - \delta$, $C_1 = \sin\delta$, $C_2 = 1 + t/R$. D'où

$$\left|\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \left(1+\frac{t}{R}\right)^{\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)-1} e^{\pi|\operatorname{Im}(\gamma-\alpha)|} & \text{si } \operatorname{Re}(\gamma-\alpha) \geqslant 1; \\ (\sin\delta)^{\operatorname{Re}(\gamma-\alpha)-1} e^{\pi|\operatorname{Im}(\gamma-\alpha)|} & \text{si } \operatorname{Re}(\gamma-\alpha) < 1. \end{cases}$$

De ces estimations pour $|\gamma - \alpha| \leqslant \mu$, on tire aisément l'inégalité

$$\left|\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}\right| \leqslant M\left(1+\frac{t}{R}\right)^{\mu},$$

où M est une constante. L'estimation de $|t^{\alpha-1}|$ est donnée par la méthode habituelle: pour $\operatorname{Re}\alpha \geqslant \nu > 0$, on a $|t^{\alpha-1}| \leqslant t^{\nu-1}$. Puisque l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1}\left(1+\frac{t}{R}\right)^{\mu} dt$$

est convergente, l'intégrale du second membre de (4) sera uniformément convergente dans le domaine $|z| \geqslant R$, $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $|\gamma - \alpha| \leqslant \mu$, $\operatorname{Re}\alpha \geqslant \nu > 0$ par rapport aux variables α, γ, z. Vu le caractère arbitraire des constantes μ, ν, R et δ, la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ sera analytique par rapport à chacune des variables dans le domaine $|z| > 0$, $|\arg z| < \pi$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, et le passage à la limite dans (2) dans le domaine considéré sera possible.

Nous n'avons pas défini la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ aux bords de la coupure pour $\arg z = \pm\pi$. Pour obtenir le prolongement analytique de la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ à ces valeurs de z, il faut se servir du théorème de Cauchy et passer dans (4) de l'intégration suivant les valeurs positives de t à l'intégration le long du rayon $\arg t = \pm\delta$ (le signe positif est choisi dans le cas où les valeurs de $\arg z = \pi$).

Si $z > 0$, on peut, à l'aide de (4) et du changement $t = zs$, obtenir pour la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ la représentation intégrale dont le

champ d'application est très vaste:

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zs} s^{\alpha-1} (1+s)^{\gamma-\alpha-1} \, ds. \tag{5}$$

A l'aide du principe du prolongement analytique, on s'assure que cette représentation reste vraie dans le domaine Re $z > 0$, Re $\alpha > 0$.

Conformément au principe du prolongement analytique, les fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$ seront solutions de l'équation (1) dans les domaines considérés de valeurs de α, γ, z. Utilisant les représentations intégrales (3) à (5), on déduit sans peine les formules de dérivation suivantes:

$$\frac{dF(\alpha, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, z), \tag{6}$$

$$\frac{dG(\alpha, \gamma, z)}{dz} = -\alpha G(\alpha+1, \gamma+1, z). \tag{7}$$

$$\frac{d[z^\alpha G(\alpha, \gamma, z)]}{dz} = -\frac{\gamma-\alpha-1}{z^2} [z^\alpha G(\alpha, \gamma-1, z)]. \tag{7'}$$

Comme dans le cas des fonctions hypergéométriques, on peut, ayant recours aux formules de dérivation et à l'équation différentielle pour $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$, obtenir le prolongement analytique de ces fonctions dans un domaine plus vaste de variation des paramètres. En particulier, pour la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ on aboutit à la relation

$$G(\alpha, \gamma, z) = (\alpha+1) zG(\alpha+2, \gamma+2, z) - \\ -(\gamma - z) G(\alpha+1, \gamma+1, z).$$

Diminuant de proche en proche la valeur de α d'une unité, on peut obtenir, au moyen de cette relation, le prolongement analytique de la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ dans le domaine Re $\alpha \leqslant 0$. Ceci fait, on constatera que pour toute valeur de α, γ, z la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ sera une fonction analytique de chacune des variables, les valeurs des deux autres variables étant fixes, à condition de faire dans le plan de la variable complexe z une coupure pour $z \leqslant 0$. On vérifie sans peine que la relation limite (2) pour la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ reste vraie quel que soit α.

Un procédé plus commode de prolongement analytique de la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ à des valeurs arbitraires des paramètres α et γ sera indiqué plus loin.

2. Développement en série de la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$. Le moyen le plus facile d'obtenir le prolongement analytique de la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ consiste à la développer en série suivant les puissances de z. Pour mettre la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ sous la forme d'une série, développons dans (3) la fonction e^{zt} et faisons l'intégration de la sé-

rie obtenue terme à terme:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \int_0^1 t^{\alpha+k-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(\gamma)_k\, k!},$$

où

$$(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\ \ldots\ (\alpha+k-1)$$

(la possibilité d'inversion de l'ordre de la sommation et de l'intégration est facile à montrer). Ainsi donc,

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}. \tag{8}$$

Notons que la série (8) peut être obtenue de la série hypergéométrique (13) du § 27 en faisant le changement de z en z/β et en passant ensuite à la limite pour $\beta \to \infty$, c.-à-d.

$$F(\alpha, \gamma, z) = \lim_{\beta\to\infty} F(\alpha, \beta, \gamma, z/\beta).$$

Après avoir étudié la convergence de la série (8) au moyen du critère de d'Alembert, on constate que la série de la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ converge uniformément par rapport à α, γ, z dans tout domaine fermé de variation de ces variables si $|\gamma + k| \geqslant \delta$ ($k = 0, 1, \ldots$). Pour cette raison la série correspondante représente une fonction analytique de ces variables pour $\gamma \neq -k$ et, en vertu du principe du prolongement analytique, la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ définie par cette série est solution de l'équation (1).

Introduisons la fonction $\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$ et étudions la convergence de la série comme précédemment: on constate que la fonction $\varphi(\alpha, \gamma, z)$ est fonction analytique de chacune des variables pour toute valeur de γ, y compris pour $\gamma = -k$.

3. Relations de récurrence. Par une méthode analogue à celle exposée au § 27, 2, on peut montrer que dans le cas où les différences $\alpha_i - \alpha_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ sont des entiers n'importe quelles trois fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \gamma_2, z)$ et $F(\alpha_3, \gamma_3, z)$ sont liées entre elles par des relations linéaires simples. Il en est de même pour les fonctions $G(\alpha, \gamma, z)$.

Exposons brièvement la méthode de recherche de telles relations. Considérons à cet effet la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{3} C_i F(\alpha_i, \gamma_i, z)$.

A l'aide de la représentation intégrale (3), mettons cette combinaison sous la forme

$$\int_0^1 t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}e^{zt}P(t)\,dt. \tag{9}$$

Ici $P(t)$ est un polynôme par rapport à la variable t dont les coefficients dépendent linéairement de C_i (voir § 27, 2). Choisissons les coefficients C_i de façon que l'expression sous le signe d'intégration dans (9) soit la dérivée par rapport à la variable t:

$$t^{\alpha_0-1}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0-1}e^{zt}P(t)=\frac{d}{dt}\left[t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}e^{zt}Q(t)\right]. \tag{10}$$

Ici $Q(t)$ est un polynôme par rapport à la variable t.

Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{3}C_iF(\alpha_i,\ \gamma_i,\ z)=t^{\alpha_0}(1-t)^{\gamma_0-\alpha_0}e^{zt}Q(t)\Big|_0^1.$$

On s'assure facilement que les substitutions s'annulent. Aussi, pour les coefficients C_i vérifiant la condition (10), aura-t-on une relation linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^{3}C_iF(\alpha_i,\ \gamma_i,\ z)=0.$$

Comme dans le cas des fonctions hypergéométriques ordinaires, le polynôme $Q(t)$ est déterminé à un facteur près, grâce à quoi, lors de la recherche des coefficients C_i, on peut négliger dans l'expression de $P(t)$ le facteur superflu ne dépendant pas de t. Il est facile de vérifier que les coefficients C_i sont des fractions rationnelles de la variable z.

Changeant dans la représentation intégrale (5) s en $-t$, on arrive à obtenir pour la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ une représentation analogue à la représentation intégrale (3) de $F(\alpha, \gamma, z)$:

$$G(\alpha,\ \gamma,\ z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{0}(-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{zt}\,dt.$$

La représentation obtenue ne diffère de la représentation intégrale (3) que par le facteur et les bornes d'intégration. Reprenant tous les raisonnements précédents on s'assure aisément que les fonctions

$$G(\alpha,\ \gamma,\ z) \quad \text{et} \quad e^{i\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\ \gamma,\ z)$$

satisferont aux mêmes relations de récurrence.

A titre d'exemple, déduisons la relation de récurrence qui lie les fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ et $F(\alpha \pm 1, \gamma, z)$. Dans ce cas

$$\alpha_1 = \alpha - 1, \ \alpha_2 = \alpha, \ \alpha_3 = \alpha + 1, \ \alpha_0 = \alpha - 1,$$
$$\gamma_0 - \alpha_0 = \gamma - \alpha - 1.$$

A un facteur indépendant de t près, le polynôme $P(t)$ prend la forme

$$P(t) = C_1\alpha(\alpha - 1)(1 - t)^2 + C_2\alpha(\gamma - \alpha)t(1 - t) + \\ + C_3(\gamma - \alpha)(\gamma - \alpha - 1)t^2. \quad (11)$$

Le degré du polynôme $Q(t)$ est 0. On peut donc admettre que $Q(t) = 1$. Il en vient que l'égalité (10) prend la forme

$$e^{zt}t^{\alpha-2}(1-t)^{\gamma-\alpha-2}P(t) = \frac{d}{dt}[e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}].$$

D'où

$$P(t) = zt(1-t) + (\alpha-1)(1-t) - (\gamma-\alpha-1)t.$$

En comparant l'expression obtenue avec (11) on trouve

$$C_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad C_2 = \frac{2\alpha-\gamma+z}{\alpha(\gamma-\alpha)}, \quad C_3 = -\frac{1}{\gamma-\alpha},$$

et en définitive

$$(\gamma - \alpha)F(\alpha - 1, \gamma, z) + (2\alpha - \gamma + z)F(\alpha, \gamma, z) - \\ - \alpha F(\alpha + 1, \gamma, z) = 0. \quad (12)$$

4. **Relations fonctionnelles.** Supposons que la fonction $f(\alpha, \gamma, z)$ est solution particulière de l'équation hypergéométrique dégénérée (1). Alors cette équation admet aussi pour solutions les fonctions (voir § 10)

$$e^z z^{1-\gamma} f(1-\alpha, 2-\gamma, -z), \ z^{1-\gamma} f(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z),$$
$$e^z f(\gamma-\alpha, \gamma, -z).$$

Posant $f(\alpha, \gamma, z) = F(\alpha, \gamma, z)$ ou $f(\alpha, \gamma, z) = G(\alpha, \gamma, z)$, nous obtenons huit solutions de l'équation (1). Puisque l'équation (1) ne peut avoir que deux solutions linéairement indépendantes, les solutions obtenues ci-dessus doivent être liées par des relations linéaires. Etablissons-les d'abord pour les fonctions hypergéométriques dégénérées de première espèce. Soit $\gamma \neq n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Alors les fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ et $z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ seront linéairement indépendantes en vertu de leur comportement différent pour $z \to 0$ et, par conséquent,

$$e^z F(\gamma-\alpha, \gamma, -z) = C_1 F(\alpha, \gamma, z) + C_2 z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Si $\operatorname{Re} \gamma > 1$, on trouve, en comparant le comportement du premier et du second membre de cette égalité

pour $z \to 0$, que $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, c.-à-d. que

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \tag{13}$$

Selon le principe du prolongement analytique l'égalité obtenue reste vraie quels que soient α, γ, z.

Les solutions de l'équation (1) $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ et $e^z z^{1-\gamma} F(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z)$ coïncident en vertu de (13).

Cherchons la liaison entre les fonctions hypergéométriques dégénérées de seconde espèce. Comparant le comportement pour $z \to \infty$ des solutions de l'équation (1) formées de fonctions de seconde espèce, nous trouvons, à l'aide de la relation limite (2), que $G(\alpha, \gamma, z)$ et $e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$ seront linéairement indépendantes quels que soient α et γ et de plus

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \tag{14}$$

$$e^z z^{1-\gamma} G(1 - \alpha, 2 - \gamma, -z) = e^z G(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \tag{15}$$

La relation (15) découle d'ailleurs de (14).

Cherchons maintenant la liaison entre les fonctions hypergéométriques dégénérées de première et de seconde espèce. Si $\gamma \neq n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), on peut développer la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ suivant deux solutions linéairement indépendantes de (1) $F(\alpha, \gamma, z)$ et $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$:

$$G(\alpha, \gamma, z) = A(\alpha, \gamma) F(\alpha, \gamma, z) + B(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \tag{16}$$

Appliquant à ce développement la relation (14), on obtient

$$A(\alpha, \gamma) = B(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma). \tag{17}$$

Pour trouver le coefficient $B(\alpha, \gamma)$, supposons provisoirement que $\operatorname{Re} \gamma - 1 > \operatorname{Re} \alpha > 0$ et passons dans les égalités (16) et (4) à la limite pour $z \to 0$. Il vient

$$B(\alpha, \gamma) = \lim_{z \to 0} z^{\gamma-1} G(\alpha, \gamma, z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} (z+t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma-2}\, dt = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}.$$

La possibilité du passage à la limite sous le signe d'intégration est facile à justifier. De la relation (17) on tire

$$A(\alpha, \gamma) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}.$$

De cette façon,

$$G(\alpha, \gamma, z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z). \quad (18)$$

En vertu du principe du prolongement analytique la relation (18) reste vraie quels que soient α et γ. Pour $\gamma \neq n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, cette relation permet de développer la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ suivant les puissances de z ayant recours aux développements correspondants des fonctions hypergéométriques dégénérées de première espèce.

A l'aide des relations fonctionnelles (18) et (13), on arrive à développer la fonction $F(\alpha, \gamma, z)$ suivant les fonctions hypergéométriques dégénérées de seconde espèce $G(\alpha, \gamma, z)$ et $e^{z} G(\gamma-\alpha, \gamma, -z)$. On a

$$e^{z} G(\gamma-\alpha, \gamma, -z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} e^{z} F(\gamma-\alpha, \gamma, -z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{1-\gamma} e^{z} F(1-\alpha, 2-\gamma, -z)=$$
$$=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} F(\alpha, \gamma, z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z). \quad (19)$$

Ici $|\arg(-z)|<\pi$, d'où il résulte que

$$(-z)^{1-\gamma}=z^{1-\gamma} e^{\mp i \pi(1-\gamma)}=-z^{1-\gamma} e^{\pm i \pi \gamma}$$

à condition que $|\arg z|<\pi$ (le signe plus correspond à $\operatorname{Im} z>0$).

Eliminant entre (18) et (19) $z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)$ et utilisant la formule de complément pour la fonction gamma, on obtient

$$F(\alpha, \gamma, z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i \pi \alpha} G(\alpha, \gamma, z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pm i \pi(\alpha-\gamma)} e^{z} G(\gamma-\alpha, \gamma, -z) \quad (20)$$

(en prenant le signe plus pour le demi-plan supérieur et le signe moins pour le demi-plan inférieur).

5. **Cas singuliers.** Comme on l'a signalé plus haut, la relation (18) n'a pas de sens quand $\gamma=n$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$, car une des fonctions hypergéométriques dégénérées de première espèce de cette relation n'est pas définie pour $\gamma=n$. D'autre part, puisque la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ est analytique, il existe $\lim_{\gamma \rightarrow n} G(\alpha, \gamma, z)=$ $=G(\alpha, n, z)$. De cette façon, la valeur de $\gamma=n$ est un point singulier éliminable pour le second membre de la relation (18). Afin d'obtenir la relation fonctionnelle correspondante pour $\gamma=n$,

passons dans (18) des fonctions $F(\alpha, \gamma, z)$ aux fonctions $\varphi(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \gamma, z)$ qui ont un sens quel que soit γ. En vertu de la relation fonctionnelle (14) pour $G(\alpha, \gamma, z)$, il nous suffit de considérer les cas où $n \geqslant 1$. On a

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\pi}{\sin \pi\gamma}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\varphi(\alpha, \gamma, z) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma}\varphi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)\right]. \quad (21)$$

Puisque $\sin \pi\gamma = 0$ quand $\gamma = n$, on a la relation

$$z^{1-n}\varphi(\alpha-n+1, 2-n, z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n+1)}\varphi(\alpha, n, z). \quad (22)$$

La valeur de $\gamma = n$ dans le second membre de (21) est un point singulier éliminable. Passons dans (21) à la limite pour $\gamma \to n$. Utilisant l'égalité (22) et calculant les limites selon la règle de L'Hospital, on obtient

$$G(\alpha, n, z) = (-1)^n\left[\frac{\ln z + \psi(\alpha)}{\Gamma(\alpha-n+1)}\varphi(\alpha, n, z) + \right.$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-n+1)}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\varphi(\alpha, \gamma, z)\Big|_{\gamma=n} +$$
$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{1-n}\frac{\partial\varphi(\alpha-n+1, \gamma, z)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=2-n}\right]. \quad (23)$$

Utilisant le développement en série suivant les puissances de z pour la fonction $\varphi(\alpha, \gamma, z)$, on arrive à déduire de la relation (23), moyennant des calculs analogues à ceux faits au § 27, 5, le développement correspondant pour $G(\alpha, n, z)$:

$$G(\alpha, n, z) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(\alpha-n+1)}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k (k-1)!}{(n-1-k)!\,(\alpha-k)_k} z^{-k} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k z^k}{(n+k-1)!\,k!}[\psi(k+1) + \psi(n+k) - \psi(\alpha+k) - \ln z]\right\}$$

(pour $n = 1$, on prendra la première somme comme égale à zéro).

6. **Représentations asymptotiques.** Définissant la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$, on a démontré la relation limite (2) qui entraîne, pour $z \to \infty$,

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha}[1 + r(z)],$$

où $r(z) \to 0$ pour $z \to \infty$. Tâchons de donner une estimation plus précise du reste. A cet effet, utilisons la formule de dérivation (7′).

Intégrant cette formule, on obtient

$$r(z) = z^{\alpha} G(\alpha, \gamma, z) - 1 = (\gamma - \alpha - 1) \int_{z}^{\infty} \frac{s^{\alpha} G(\alpha, \gamma - 1, s)}{s^2} ds.$$

Pour chemin d'intégration on peut prendre la demi-droite $s = zt$, $1 < t < \infty$. D'où

$$r(z) = \frac{\gamma - \alpha - 1}{z} \int_{1}^{\infty} \frac{(zt)^{\alpha} G(\alpha, \gamma - 1, zt)\, dt}{t^2}. \tag{24}$$

En considérant la convergence de l'intégrale (4), on a démontré que la fonction $|z^{\alpha} G(\alpha, \gamma, z)|$ est uniformément bornée dans le domaine $|z| \geqslant R$, $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) \leqslant \mu$, $\operatorname{Re} \alpha \geqslant \nu > 0$. On a donc dans ce domaine $|z^{\alpha} G(\alpha, \gamma - 1, z)| \leqslant C$ (C est une constante), d'où

$$r(z) = O\left(\frac{1}{z}\right).$$

On peut renoncer à la restriction $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ en utilisant la remarque faite au n° 1 relative au prolongement analytique de la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ jusqu'aux valeurs de $\arg z = \pm\pi$. Il en est de même de la restriction $\operatorname{Re} \alpha \geqslant \nu > 0$ si l'on utilise la relation de récurrence existant entre les fonctions $G(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha \pm 1, \gamma, z)$.

La fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ permet donc la représentation asymptotique suivante:

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{25}$$

Il est aisé d'obtenir les termes suivants de la représentation asymptotique en recourant dans (24) à l'intégration par parties et à la formule de dérivation (7′). On obtient le même résultat si, en développant dans (4) la fonction $(1 + t/z)^{\gamma - \alpha - 1}$ selon la formule binomiale, on tient compte de quelques premiers termes.

La représentation asymptotique de la fonction hypergéométrique dégénérée $F(\alpha, \gamma, z)$ avec $z \to \infty$ découle de la représentation (25) et de la relation fonctionnelle (20):

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{z} z^{\alpha - \gamma}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] \tag{26}$$

$$(|\arg z| \leqslant \pi, \ |\arg(-z)| \leqslant \pi).$$

7. Fonctions de Whittaker. Un des cas particuliers fort importants de l'équation généralisée du type hypergéométrique est l'*équa-*

tion de Whittaker

$$u'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2}\right) u = 0.$$

Ici k et μ sont des constantes.

A l'aide de la méthode décrite au § 10, 2, on ramène cette équation à l'équation hypergéométrique dégénérée. Dans le cas considéré $\tilde{\tau}(z) = 0$, $\sigma(z) = z$, $\tilde{\sigma}(z) = -\frac{1}{4}z^2 + kz + \frac{1}{4} - \mu^2$. Après avoir effectué le changement $y = \varphi(z) u$, où $\varphi(z) = z^{-\mu-1/2}e^{z/2}$, on obtient l'équation différentielle

$$zy'' + (2\mu + 1 - z) y' + \left(k - \mu - \frac{1}{2}\right) y = 0$$

qui a pour solutions les fonctions

$$y_1(z) = F\left(\frac{1}{2} - k + \mu,\ 2\mu + 1,\ z\right),$$

$$y_2(z) = G\left(\frac{1}{2} - k + \mu,\ 2\mu + 1,\ z\right).$$

De cette façon, l'équation de Whittaker a pour solutions particulières

$$u_1(z) = M_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2}e^{-z/2}F\left(\frac{1}{2} - k + \mu,\ 2\mu + 1,\ z\right),$$

$$u_2(z) = W_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2}e^{-z/2}G\left(\frac{1}{2} - k + \mu,\ 2\mu + 1,\ z\right),$$

dites *fonctions de Whittaker*.

Les fonctions de Whittaker $M_{k\mu}(z)$ ont un comportement simple pour $z \to 0$, et les fonctions $W_{k\mu}(z)$, pour $z \to \infty$.

Puisque l'équation de Whittaker ne change pas quand on remplace μ par $-\mu$ ni quand on remplace simultanément k par $-k$ et z par $-z$, elle a également pour solutions les fonctions $M_{k,-\mu}(z)$ et $M_{-k,\pm\mu}(-z)$, $W_{k,-\mu}(z)$ et $W_{-k,\pm\mu}(-z)$. L'équation de Whittaker n'admettant que deux solutions linéairement indépendantes, les solutions obtenues doivent être liées par un certain nombre de relations fonctionnelles. Signalons les relations les plus simples qui découlent des relations fonctionnelles correspondantes pour les fonctions hypergéométriques dégénérées de première et de seconde espèce. On a

$$M_{-k,\mu}(-z) = (-z)^{\mu+1/2}e^{z/2}F\left(\frac{1}{2} + k + \mu,\ 2\mu + 1,\ -z\right).$$

D'autre part, en vertu de (13)

$$M_{k\mu}(z) = z^{\mu+1/2}e^{z/2}F\left(\frac{1}{2} + k + \mu,\ 2\mu + 1,\ -z\right),$$

ce qui signifie que les fonctions $M_{k\mu}(z)$ et $M_{-k,\mu}(-z)$ sont linéairement dépendantes. Il résulte de la relation fonctionnelle (14) que

$$W_{k,-\mu}(z) = W_{k\mu}(z).$$

§ 29. Fonctions d'Hermite

1. Définition de la fonction $H_\nu(z)$. Comme il a été montré au § 10, on peut, par changement linéaire de la variable indépendante, réduire l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(z)\, y''(z) + \tau(z)\, y'(z) + \lambda y(z) = 0$$

à une équation de la forme

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0 \tag{1}$$

dans le cas où $\sigma(z)$ est indépendante de z. Si $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), l'équation (1) a pour solution particulière le polynôme d'Hermite $H_n(z)$. On a montré au § 7, 4 que les polynômes d'Hermite $H_n(z)$ s'expriment à l'aide des polynômes de Laguerre $L_n^\alpha(z^2)$ pour $\alpha = \pm 1/2$. Les polynômes de Laguerre étant un cas particulier d'une fonction hypergéométrique dégénérée, on peut s'attendre à ce que, dans le cas général aussi, pour $\nu \neq n$, on puisse réduire l'équation (1) par changement $\xi = z^2$ à l'équation hypergéométrique dégénérée. En effet, posant dans (1) $\xi = z^2$, on obtient

$$\xi y'' + \left(\frac{1}{2} - \xi\right) y' + \frac{\nu}{2} y = 0. \tag{2}$$

L'équation (2) a pour solutions particulières les fonctions

$$y_1(z) = G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, \xi\right) = G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right),$$

$$y_2(z) = e^{\xi} G\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{1}{2}, -\xi\right) = e^{z^2} G\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{1}{2}, -z^2\right).$$

Si $z \to +\infty$, alors $y_1(z) \approx z^\nu$, $y_2(z) \approx e^{z^2} z^{-\nu-1}$. Puisque les polynômes d'Hermite $H_n(z)$ pour $z \to +\infty$ prennent la forme (voir § 7, 4)

$$H_n(z) \approx 2^n z^n,$$

le polynôme $H_n(z)$ admet une généralisation naturelle aux valeurs de $\nu \neq n$ sous la forme de la fonction

$$H_\nu(z) = 2^\nu y_1(z) = 2^\nu G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right), \tag{3}$$

dite *fonction d'Hermite*.

Ayant recours à la relation fonctionnelle (18) du § 28, on peut exprimer la fonction d'Hermite au moyen des fonctions hypergéométriques dégénérées:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma(-1/2)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} zF\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right). \tag{4}$$

On voit de cette représentation que la fonction $H_\nu(z)$ pour tout ν et tout z sera fonction analytique de chacune de ces variables. La représentation (3) reste vraie pour $|\arg z| \leqslant \pi/2$, car les fonctions $G(\alpha, \gamma, z)$ sont fonctions analytiques de z quand $|\arg z| \leqslant \pi$. Notons une conséquence évidente de la relation (3): on a pour $|\arg z| \leqslant \pi/2$

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]. \tag{5}$$

Nous avons trouvé la solution particulière de l'équation (1) en la réduisant, par le changement $\xi = z^2$, à l'équation hypergéométrique dégénérée. D'autre part, on peut chercher la solution particulière de l'équation (1) par la méthode générale exposée dans le § 10. A l'aide de cette méthode, on obtient la solution particulière de l'équation (1) sous la forme

$$y_\nu(z) = A_\nu e^{z^2} \int_C e^{-s^2} (s-z)^{-\nu-1}\, ds.$$

Ici A_ν est une constante de normalisation, et le contour C est choisi de sorte qu'à ses extrémités s_1 et s_2 soit vérifiée l'égalité

$$e^{-s^2}(s-z)^{-\nu-1}\big|_{s=s_1,\, s_2} = 0.$$

Soit $\operatorname{Re} \nu < -1$. Alors on peut prendre pour contour C la demi-droite $s = z + t$ $(0 < t < \infty)$. Il en résulte

$$y_\nu(z) = A_\nu \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} t^{-\nu-1}\, dt.$$

Cherchons à établir la liaison de cette solution avec la fonction d'Hermite $H_\nu(z)$. Pour cela, trouvons la représentation asymptotique de la fonction $y_\nu(z)$ pour $z \to +\infty$. On a $e^{-t^2} = 1 + r(t)$, où $|r(t)| \leqslant t^2$. D'où

$$y_\nu(z) = A_\nu \Gamma(-\nu)(2z)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right],$$

c.-à-d. que la fonction $y_\nu(z)$ coïncide avec $H_\nu(z)$ lorsque $A_\nu = \dfrac{1}{\Gamma(-\nu)}$.

Ainsi donc, pour $\operatorname{Re} \nu < -1$

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} t^{-\nu-1}\, dt. \tag{6}$$

L'intégrale (6) converge uniformément en z et ν dans le domaine $\operatorname{Re} z \geqslant R$, $\operatorname{Re} \nu \leqslant \nu_0 < 0$, ce qui découle des estimations

$$|e^{-2zt}| \leqslant e^{-2Rt} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} z \geqslant R, \tag{7}$$

$$|t^{-\nu-1}| \leqslant t^{-\nu_0-1} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} \nu \leqslant \nu_0 \tag{8}$$

et de la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-2Rt}t^{-\nu_0-1}\,dt$. C'est pourquoi, vu le caractère arbitraire des constantes R et ν_0, l'intégrale (6) est une fonction analytique de chacune des variables ν et z à condition que $\operatorname{Re}\nu < 0$. Selon le principe du prolongement analytique, la représentation intégrale (6) reste vraie, la condition $\operatorname{Re}\nu < 0$ étant moins restrictive.

En nous basant sur les représentations (3), (4) et (6) nous étudierons plus loin les propriétés fondamentales des fonctions d'Hermite $H_\nu(z)$.

2. Relation de récurrence. Soit $\operatorname{Re}\nu < 0$. Dérivant la représentation (6) par rapport à z, on obtient

$$H'_\nu(z) = -\frac{2}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-t^2-2zt}t^{-\nu}\,dt,$$

d'où

$$H'_\nu(z) = 2\nu H_{\nu-1}(z). \tag{9}$$

La possibilité de la dérivation sous le signe d'intégration découle des estimations (7) et (8). En vertu du principe du prolongement analytique, la formule de dérivation (9) reste valable, quel que soit ν.

Portant les expressions des dérivées de la fonction $H_\nu(z)$ dans l'équation différentielle (1), on obtient la relation de récurrence pour les fonctions d'Hermite:

$$H_\nu(z) - 2zH_{\nu-1}(z) + 2(\nu-1)H_{\nu-2}(z) = 0. \tag{10}$$

3. Développement en série. Soit $\operatorname{Re}\nu < 0$. Développant dans la représentation (6) e^{-2zt} en série suivant les puissances de z et intervertissant l'ordre de la sommation et de l'intégration, nous obtenons

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^k}{k!}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{k-\nu-1}\,dt.$$

Puisque

$$\int_0^\infty e^{-t^2}t^{k-\nu-1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{k-\nu}{2}-1}\,ds = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k-\nu}{2}\right),$$

on a

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu)}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\Gamma\left(\frac{k-\nu}{2}\right)}{k!}z^k. \tag{11}$$

La possibilité d'intervertir l'ordre de la sommation et de l'intégration est facile à justifier. La généralisation du développement (11) à des valeurs quelconques de ν ne présente pas de difficultés non plus.

Le développement (11) est vrai pour $\nu \neq n$ ($n = 0, 1, \ldots$). Si $\nu = n$, le développement correspondant s'obtient aisément à l'aide de la représentation (4) et du développement en série des fonctions hypergéométriques dégénérées.

4. **Relations fonctionnelles.** Soit $y = f(\nu, z)$ une solution particulière de l'équation (1). Alors, comme il a été montré au § 10, 2, cette équation a également pour solutions les fonctions $f(\nu, -z)$, $e^{z^2} f(-\nu - 1, \pm iz)$. Conformément à ce qui précède, l'équation (1) a quatre solutions suivantes:

$$H_\nu(\pm z) \text{ et } e^{z^2} H_{-\nu-1}(\pm iz).$$

Comme l'équation (1) n'admet que deux solutions linéairement indépendantes, les fonctions ci-dessus doivent être liées par des relations linéaires.

De la représentation (4) il découle que pour $\nu \neq 0, 1, 2, \ldots$ les fonctions $H_\nu(z)$ et $H_\nu(-z)$ seront linéairement indépendantes. Pour toute valeur de ν, il en est de même des fonctions

$$H_\nu(z) \text{ et } e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz), \quad H_\nu(z) \text{ et } e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz),$$

ce qui découle du comportement de ces fonctions pour $z \to +\infty$.

Cherchons tout d'abord à établir la relation entre la fonction $H_\nu(z)$ et les fonctions $e^{z^2} H_{-\nu-1}(\pm iz)$. Quand $-\nu - 1 \neq 0, 1, 2, \ldots$, on a

$$H_\nu(z) = e^{z^2} [A_\nu H_{-\nu-1}(iz) + B_\nu H_{-\nu-1}(-iz)].$$

Soit $z > 0$ et $z \to +\infty$. De la représentation asymptotique (5) on tire

$$A_\nu e^{-\frac{i\pi(\nu+1)}{2}} + B_\nu e^{\frac{i\pi(\nu+1)}{2}} = 0,$$

d'où

$$H_\nu(z) = C_\nu e^{z^2} [e^{i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu-1}(iz) + e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} H_{-\nu-1}(-iz)],$$

où $C_\nu = A_\nu e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}$. Pour déterminer la constante C_ν, remarquons qu'en vertu de (4) on a $H_\nu(0) = \dfrac{2^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}$. Pour cette raison

$$C_\nu = \frac{2^{2\nu} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\cos\frac{\pi\nu}{2} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} = \frac{2^{2\nu}}{\pi} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}.$$

En calculant la constante C_ν, on a employé les formules de complément et de duplication pour la fonction gamma. On a en définitive

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}e^{z^2}\left[e^{i\frac{\pi\nu}{2}}H_{-\nu-1}(iz)+e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}H_{-\nu-1}(-iz)\right]. \quad (12)$$

Remplaçant ici z par $-z$, établissons la relation entre les fonctions $H_\nu(-z)$ et $e^{z^2}H_{-\nu-1}(\pm iz)$:

$$H_\nu(-z)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}e^{z^2}\left[e^{i\frac{\pi\nu}{2}}H_{-\nu-1}(-iz)+e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}H_{-\nu-1}(iz)\right]. \quad (13)$$

Combinant les relations (12) et (13), on peut obtenir d'autres relations analogues, telles que

$$H_\nu(z)=e^{i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2+i\frac{\pi(\nu+1)}{2}}H_{-\nu-1}(-iz), \quad (14)$$

$$H_\nu(z)=e^{-i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2-i\frac{\pi(\nu+1)}{2}}H_{-\nu-1}(iz). \quad (15)$$

5. **Représentations asymptotiques.** On a obtenu plus haut (voir formule (5)) les représentations asymptotiques de la fonction $H_\nu(z)$ à condition que $|\arg z|\leqslant\pi/2$. Dans le reste du plan, les représentations asymptotiques pour $H_\nu(z)$ s'obtiennent à l'aide des relations fonctionnelles (14) et (15).

Soit $-\pi\leqslant\arg z\leqslant-\pi/2$. Posant dans (15) $-z=ze^{i\pi}$, $iz=$ $=ze^{i\frac{\pi}{2}}$ et moyennant la représentation (5) on trouve

$$H_\nu(z)=(2z)^\nu\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]-$$
$$-\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2-i\pi\nu}(2z)^{-\nu-1}\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]. \quad (16)$$

De façon analogue, on tire de la relation (14) pour $\pi/2\leqslant\arg z\leqslant\pi$:

$$H_\nu(z)=(2z)^\nu\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]-$$
$$-\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2+i\pi\nu}(2z)^{-\nu-1}\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]. \quad (17)$$

§ 30. Représentation des fonctions diverses au moyen des fonctions du type hypergéométrique

Nombre de fonctions spéciales qu'on rencontre dans les problèmes de physique mathématique et théorique peuvent être exprimées au moyen des fonctions du type hypergéométrique: la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, les fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$, la fonction d'Hermite $H_\nu(z)$. Une telle

représentation permet d'étudier les propriétés des fonctions considérées en utilisant les résultats obtenus auparavant pour les fonctions du type hypergéométrique. Prenons quelques exemples typiques *).

1. Quelques fonctions élémentaires. Les fonctions $F(\alpha, 0, \gamma, z)$, $F(0, \gamma, z)$ et $G(0, \gamma, z)$ ont la forme la plus simple. En effet, utilisant les séries entières correspondantes et la relation (18) du § 28, on obtient

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = F(0, \gamma, z) = G(0, \gamma, z) = 1.$$

Par application des relations fonctionnelles (14) du § 27, (13) et (14) du § 28, on trouve

$$F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha} F(\beta - \alpha, 0, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha};$$
$$F(\alpha, \alpha, z) = e^z F(0, \alpha, -z) = e^z;$$
$$G(\alpha, \alpha+1, z) = z^{-\alpha} G(0, 1-\alpha, z) = z^{-\alpha}.$$

2. Polynômes orthogonaux classiques. Proposons-nous d'exprimer les polynômes orthogonaux classiques au moyen des fonctions du type hypergéométrique. Comme il a été montré dans le § 14, les solutions de l'équation différentielle pour les polynômes orthogonaux classiques

$$\sigma(x) y'' + \tau(x) y' + \lambda y = 0,$$

qui vérifient les conditions que la fonction $y(x, \lambda)\sqrt{\rho(x)}$ soit continue et de carré intégrable, coïncident à un facteur près avec les polynômes orthogonaux classiques dans le cas où le poids $\rho(x)$ est une fonction non négative bornée. D'autre part, il est possible d'exprimer les solutions de l'équation du type hypergéométrique à l'aide des fonctions hypergéométriques, des fonctions hypergéométriques dégénérées ou des fonctions d'Hermite. Compte tenu de ces considérations, on établit sans peine la liaison existant entre les polynômes orthogonaux classiques et les fonctions énumérées.

1) *Polynômes de Jacobi.* Pour les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ le poids

$$\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

sera une fonction non négative bornée sur le segment $[-1, 1]$ si la condition $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ est remplie. Par changement $x = 1 - 2z$, on réduit l'équation différentielle pour ces polynômes

$$(1-x^2) y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) x] y' + \lambda_n y = 0,$$
$$\lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1),$$

à l'équation hypergéométrique

$$z(1-z) y'' + [\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + 1) z] y' - \alpha_1 \beta_1 y = 0$$

*) On trouvera d'autres exemples intéressants dans [8].

dans laquelle $\alpha_1 = -n$, $\beta_1 = n + \alpha + \beta + 1$, $\gamma_1 = \beta + 1$. La solution particulière de cette équation est de la forme

$$y(x, \lambda_n) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z) = F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

Lorsque $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, cette solution satisfait aux conditions de continuité de la fonction $y(x, \lambda_n)\sqrt{\rho(x)}$ sur le segment $[-1, 1]$ (voir § 14). C'est pourquoi

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = C_n F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

On trouve facilement la constante C_n en posant $x = 1$ (voir § 7, 4). Il en vient

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right). \quad (1)$$

A l'aide de la relation (voir § 7, 4)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x),$$

on peut obtenir une autre écriture équivalente de la représentation (1):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)} \times$$
$$\times F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \beta+1, \frac{1+x}{2}\right). \quad (2)$$

Les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ sont des fonctions analytiques des paramètres α et β, ce qui découle de la formule de Rodrigues pour ces polynômes (voir § 7, 4). Aussi les relations (1) et (2) restent-elles vraies, quels que soient α et β.

Posant dans (1) et (2) $\alpha = \beta = 0$, on obtient les représentations suivantes des polynômes de Legendre au moyen des fonctions hypergéométriques:

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right) =$$
$$= (-1)^n F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+x}{2}\right).$$

Ayant recours à la formule de dérivation pour les fonctions hypergéométriques, on établit facilement la liaison entre les fonctions de Legendre associées

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \qquad (m \geqslant 0)$$

et les fonctions hypergéométriques:

$$P_l^m(x)=$$
$$=\frac{(l+m)!}{2^m m!(l-m)!}(1-x^2)^{m/2}F\left(-l+m,\ l+m+1,\ m+1,\ \frac{1-x}{2}\right)=$$
$$=(-1)^{l+m}\frac{(l+m)!}{2^m m!(l-m)!}(1-x^2)^{m/2}\times$$
$$\times F\left(-l+m,\ l+m+1,\ m+1,\ \frac{1+x}{2}\right).$$

2) *Polynômes de Laguerre.* Pour les polynômes de Laguerre $L_n^\alpha(x)$ le poids $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ sera une fonction non négative bornée pour $x \geqslant 0$ avec $\alpha \geqslant 0$. L'équation différentielle pour ces polynômes

$$xy'' + (1 + \alpha - x)\,y' + \lambda_n y = 0,\ \lambda_n = n,$$

admet une solution particulière de la forme

$$y(x, \lambda_n) = F(-n,\ 1 + \alpha,\ x).$$

Lorsque $\alpha \geqslant 0$, cette solution vérifie la condition que la fonction $y(x, \lambda_n)\sqrt{\rho(x)}$ soit continue et de carré intégrable. On a donc

$$L_n^\alpha(x) = C_n F(-n,\ 1 + \alpha,\ x).$$

On trouve facilement la constante C_n en posant $x = 0$ (voir § 7, 4). Il en résulte

$$L_n^\alpha(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}F(-n,\ 1+\alpha,\ x). \qquad (3)$$

La relation obtenue reste en vigueur, quel que soit α.

3) *Polynômes d'Hermite.* Pour exprimer les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ au moyen de la fonction hypergéométrique, il suffit de poser dans la relation (4) du § 29 $\nu = n$.

3. Fonctions de seconde espèce. La relation existant entre les fonctions de seconde espèce pour les polynômes orthogonaux classiques $Q_n(z)$ et les fonctions du type hypergéométrique s'obtient le plus facilement en partant directement des représentations intégrales pour $Q_n(z)$ (voir § 11, 2).

1) F o n c t i o n s d e J a c o b i d e s e c o n d e e s p è c e. La représentation intégrale pour la fonction de Jacobi de seconde espèce $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ est de la forme

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n(1-z)^\alpha(1+z)^\beta}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi)^{n+\alpha}(1+\xi)^{n+\beta}}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi. \qquad (4)$$

Posant $\xi=2s-1$, on a

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)=-\frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^\alpha(1+z)^{n+\beta+1}}\int_0^1 s^{n+\beta}(1-s)^{n+\alpha}\times$$
$$\times\left(1-\frac{2}{1+z}s\right)^{-n-1}ds.$$

Comparant la formule obtenue avec la représentation intégrale (5) du § 27 pour la fonction hypergéométrique, nous arrivons à la représentation suivante de $Q_n^{(\alpha,\beta)}(z)$:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^\alpha (1+z)^{n+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times$$
$$\times F\left(n+1,\ n+\beta+1,\ 2n+\alpha+\beta+2,\ \frac{2}{1+z}\right).$$

De façon tout à fait analogue, en posant dans (4) $\xi = 1 - 2s$, nous obtenons une autre représentation:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\frac{(-1)^n 2^{n+\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{n+\alpha+1}(1+z)^\beta} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times$$
$$\times F\left(n+1,\ n+\alpha+1,\ 2n+\alpha+\beta+2,\ \frac{2}{1-z}\right).$$

2) Fonctions de Laguerre de seconde espèce. La représentation intégrale de la fonction de Laguerre de seconde espèce $Q_n^\alpha(z)$ est de la forme

$$Q_n^\alpha(z) = \frac{1}{e^{-z}z^\alpha} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}\xi^{n+\alpha}}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi =$$
$$= (-1)^{n+1} e^z z^{-(n+\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{n+\alpha}\left(1-\frac{\xi}{z}\right)^{-n-1} d\xi.$$

Comparant cette expression avec la représentation intégrale (4) du § 28 pour la fonction hypergéométrique dégénérée de seconde espèce, on a

$$Q_n^\alpha(z) = (-1)^{n+1} e^z z^{-(n+\alpha+1)} \Gamma(n+\alpha+1)(-z)^{n+\alpha+1} \times$$
$$\times G(n+\alpha+1,\ \alpha+1,\ -z). \qquad (5)$$

Pour que la fonction $Q_n^\alpha(z)$ soit uniforme, on doit effectuer une coupure le long de l'axe réel pour $z > 0$, c.-à-d. poser $0 < \arg z < 2\pi$. En même temps, dans la représentation intégrale de $G(n+\alpha+1,\ \alpha+1,\ -z)$ il convient de poser $|\arg(-z)| < \pi$. Conformément à cela, on doit poser dans (5) $-z = ze^{i\pi}$. Il en vient

$$Q_n^\alpha(z) = e^{-i\pi\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)\, e^z G(n+\alpha+1,\ \alpha+1,\ -z).$$

3) Fonctions d'Hermite de seconde espèce. La représentation intégrale pour la fonction d'Hermite de seconde espèce $Q_n(z)$ a la forme

$$Q_n(z) = (-1)^n n!\, e^{z^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\xi^2}(\xi-z)^{-n-1} d\xi.$$

Pour exprimer $Q_n(z)$ au moyen de la fonction d'Hermite, nous tiendrons compte du fait que la fonction $Q_n(z)$ vérifie la même équation que les polynômes d'Hermite. Pour cette raison, elle peut être représentée sous la forme d'une combinaison linéaire de deux solutions linéairement indépendantes de cette

équation, c.-à-d. (voir § 29, 4)

$$Q_n(z) = A_n H_n(z) + B_n e^{z^2} H_{-n-1}(-iz) \tag{6}$$

et aussi

$$Q_n(z) = C_n H_n(z) + D_n e^{z^2} H_{-n-1}(iz). \tag{7}$$

Pour déterminer les coefficients de ces développements, utilisons des représentations asymptotiques de la fonction $Q_n(z)$ et des fonctions d'Hermite pour $z \to \infty$. Soit $z = iy$, $y \to +\infty$. Alors

$$Q_n(z) = -\frac{e^{-y^2}}{(iy)^{n+1}} n! \sqrt{\pi}\left[1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right],$$

$$H_n(z) = (2iy)^n \left[1 + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right],$$

$$H_n(-iz) = (2y)^n \left[1 + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right].$$

On en tire $A_n = 0$. Posant dans (6) $z = 0$, on trouve la constante B_n. Il vient en définitive

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi} e^{z^2 - i\frac{\pi(n-1)}{2}} H_{-n-1}(-iz) \quad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Par analogie, de la relation $Q_n(\bar{z}) = \overline{Q}_n(z)$ (la barre symbolisant la conjuguée complexe) on déduit que pour $\operatorname{Im} z < 0$

$$Q_n(z) = 2^{n+1} n! \sqrt{\pi}\, e^{z^2 + i\frac{\pi(n-1)}{2}} H_{-n-1}(iz).$$

4. **Fonctions cylindriques.** La relation entre les fonctions cylindriques et les fonctions hypergéométriques dégénérées de première et seconde espèce est facile à établir à l'aide des représentations intégrales de ces fonctions. On a par exemple (voir § 22, 1)

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + {}^1/_2)} \int_{-1}^{1} e^{zs}(1 - s^2)^{\nu - {}^1/_2}\, ds,$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z} \frac{1}{\Gamma(\nu + {}^1/_2)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu - {}^1/_2}\left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{\nu - {}^1/_2} ds.$$

Comparant les représentations intégrales pour les fonctions $K_\nu(z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$, il découle immédiatement

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi}\,(2z)^\nu e^{-z} G\left(\nu + \frac{1}{2},\ 2\nu + 1,\ 2z\right).$$

Pour établir la relation entre la fonction $I_\nu(z)$ et la fonction hypergéométrique dégénérée, dans la représentation intégrale pour $I_\nu(z)$ on posera $s = 2t - 1$. On aboutit alors à la représentation intégrale suivante:

$$I_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu e^{-z}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + {}^1/_2)} \int_0^1 e^{2zt}\,[t(1 - t)]^{\nu - {}^1/_2}\, dt.$$

D'où

$$I_\nu(z)=\frac{(2z)^\nu e^{-z}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+{}^1/_2)}{\Gamma(2\nu+1)}F\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1,\ 2z\right).$$

Or, la formule de duplication pour la fonction gamma donne

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu+1)=2^{2\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1).$$

Il vient donc en définitive

$$I_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}e^{-z}F\left(\nu+\frac{1}{2},\ 2\nu+1,\ 2z\right).$$

5. Intégrales elliptiques. On entend par intégrales elliptiques de première et de seconde espèce les fonctions

$$K(z)=\int_0^{\pi/2}(1-z^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi,$$

$$E(z)=\int_0^{\pi/2}(1-z^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi.$$

Posant $\sin^2\varphi=t$, on aboutit aux représentations intégrales suivantes:

$$K(z)=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}(1-z^2t)^{-1/2}\,dt,$$

$$E(z)=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}(1-z^2t)^{1/2}\,dt.$$

Comparant ces représentations avec les représentations intégrales pour la fonction hypergéométrique, on obtient

$$K(z)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ z^2\right),$$

$$E(z)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ z^2\right).$$

La relation entre les intégrales elliptiques et les fonctions hypergéométriques étant connue, on peut étudier les propriétés des fonctions $K(z)$ et $E(z)$ pour toute valeur complexe de z.

§ 31*. Applications des fonctions du type hypergéométrique

Les fonctions du type hypergéométrique sont largement employées à la résolution des équations différentielles de la physique mathématique par la méthode de séparation des variables dans différents systèmes de coordonnées curvilignes. Nous donnerons quelques exemples de résolution des équations de Schrödinger et de Helmholtz en coordonnées curvilignes. On examinera en outre quelques intégrales définies qui peuvent être exprimées à l'aide des fonctions hypergéométriques.

1. Fonctions d'ondes coulombiennes du spectre discret et continu. On a montré au § 16 que le problème de mouvement d'un électron dans le champ coulombien donne lieu à l'équation

$$R''+\left[2\left(E+\frac{Z}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0 \quad (0<r<\infty) \tag{1}$$

pour la fonction radiale $R(r)$ avec la condition initiale $R(0)=0$. Les états de l'électron décrits par la fonction radiale d'énergie $E<0$ appartiennent au spectre discret, et d'énergie $E>0$, au spectre continu. La solution de l'équation (1) pour les états du spectre discret doit satisfaire à la condition supplémentaire

$$\int_0^\infty R^2(r)\,dr=1. \tag{2}$$

Effectuant dans l'équation (1) le changement (voir § 16)

$$R(r)=x^{l+1}e^{-x/2}y(x), \quad x=2\sqrt{-2E}\,r,$$

on la réduit à l'équation pour la fonction hypergéométrique dégénérée

$$xy''+(2l+2-x)\,y'+\lambda y=0,$$

où

$$\lambda=\frac{Z}{\sqrt{-2E}}-l-1$$

et qui admet pour solution particulière la fonction

$$y_1(x)=F(-\lambda,\ 2l+2,\ x).$$

Puisque $y_1(0)=1$, la solution correspondante de (1) se comporte pour $r\to 0$ comme r^{l+1}. Conformément au théorème 4 du § 1, la seconde solution de (1) se comportera comme r^{-l}. Pour satisfaire à la condition initiale $R(0)=0$, la seconde solution est à négliger.

Aussi

$$R(r) = Cx^{l+1}e^{-x/2}F(-\lambda,\ 2l+2,\ x),$$

où $x = 2\sqrt{-2E}\,r$, C est la constante de normalisation.

La fonction $R(r)$ a le comportement asymptotiqu esuivant pour $r \to \infty$ (voir § 28, 6):

$$R(r) = C(2l+1)!\,x^{l+1}e^{-x/2}\left\{\frac{(-x)^{\lambda}}{\Gamma(2l+2+\lambda)}\left[1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Gamma(-\lambda)}e^{x}x^{-\lambda-2l-2}\left[1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}. \quad (3)$$

Lorsque $E < 0$, les valeurs de x et de λ seront réelles, et la fonction $R(r)$ croîtra exponentiellement pour $r \to \infty$ si $\frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \neq 0$, c.-à-d. que $\lambda \neq n_r$ ($n_r = 0, 1, 2, \ldots$). Pour cette raison la condition supplémentaire (2) pour les états du spectre discret ne sera vérifiée que pour $\lambda = n_r$, c.-à-d. pour $E = -\frac{Z^2}{2n^2}$, où $n = n_r + l + 1$. Pour de telles valeurs de l'énergie, les fonctions propres du spectre discret prennent la forme

$$R(r) = R_{nl}(r) = C_{nl}x^{l+1}e^{-x/2}F(-n+l+1,\ 2l+2,\ x),$$
$$x = \frac{2Zr}{n}.$$

La fonction hypergéométrique dégénérée $F(-n+l+1, 2l+2, x)$ étant proportionnelle au polynôme de Laguerre $L_{n-l-1}^{2l+1}(x)$ (voir § 30, 2), on aboutit à l'expression pour les fonctions radiales du spectre discret obtenue au § 16.

Pour les fonctions d'onde du spectre continu, c.-à-d. pour $E > 0$, posons $E = \frac{1}{2}k^2$, $\sqrt{-2E} = ik$, où k est le nombre d'ondes. Dans ces notations

$$R(r) = R_{kl}(r) = C_{kl}r^{l+1}e^{-ikr}F\left(\frac{iZ}{k}+l+1,\ 2l+2,\ 2ikr\right).$$

Si l'on choisit la constante de normalisation C_{kl} réelle, on montre sans peine que la fonction $R_{kl}(r)$ sera réelle elle aussi. En effet, de la relation fonctionnelle (13) du § 28 découle

$$e^{-ikr}F\left(\frac{iZ}{k}+l+1,\ 2l+2,\ 2ikr\right) =$$
$$= e^{ikr}F\left(-\frac{iZ}{k}+l+1,\ 2l+2,\ -2ikr\right).$$

Conformément à (3), la représentation asymptotique de la fonction $R_{kl}(r)$ pour $r \to \infty$ sera

$$R_{kl}(r) \approx C_{kl}(2l+1)!\, r^{l+1} \times$$
$$\times \left\{ \frac{e^{-ikr}}{\Gamma\left(l+1-\frac{iZ}{k}\right)} (-2ikr)^{-\frac{iZ}{k}-l-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{ikr}}{\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)} (2ikr)^{\frac{iZ}{k}-l-1} \right\} =$$
$$= \frac{C_{kl}(2l+1)!}{(2k)^{l+1}}\, 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{ikr} e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{iZ}{k}-l-1\right)} (2kr)^{\frac{iZ}{k}}}{\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)} \right].$$

Comme

$$\mathrm{Re}\left[\frac{e^{ikr} e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{iZ}{k}-l-1\right)} (2kr)^{\frac{iZ}{k}}}{\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)} \right] =$$
$$= \frac{e^{-\frac{\pi Z}{2k}}}{\left|\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)\right|}\, \mathrm{Re}\, e^{i\left[kr+\frac{Z}{k}\ln 2kr-\frac{\pi}{2}(l+1)+\delta_l\right]},$$

où $\delta_l = \arg \Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)$, on a en définitive

$$R_{kl}(r) \approx A_{kl} \sin\left(kr + \frac{Z}{k}\ln 2kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right).$$

Ici

$$A_{kl} = \frac{2C_{kl}(2l+1)!\, e^{-\frac{\pi Z}{2k}}}{(2k)^{l+1}\left|\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)\right|}.$$

On calcule sans difficulté l'expression $\left|\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)\right|$ à l'aide des relations fonctionnelles (6) et (7) du § 2. On a

$$\left|\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)\right| = \left|\prod_{s=1}^{l}\left(s+\frac{iZ}{k}\right)\Gamma\left(1+\frac{iZ}{k}\right)\right|,$$

$$\left|\Gamma\left(1+\frac{iZ}{k}\right)\right|^2 = \Gamma\left(1+\frac{iZ}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{iZ}{k}\right) =$$
$$= \frac{iZ}{k}\Gamma\left(\frac{iZ}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{iZ}{k}\right) = \frac{iZ}{k}\,\frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{iZ}{k}\right)} = \frac{\pi Z/k}{\operatorname{sh}\frac{\pi Z}{k}}.$$

D'où

$$\left|\Gamma\left(l+1+\frac{iZ}{k}\right)\right|=\left[\prod_{s=1}^{l}\left(s^2+\frac{Z^2}{k^2}\right)\frac{\pi Z/k}{\operatorname{sh}\frac{\pi Z}{k}}\right]^{1/2}.$$

2. Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes. Un cas très important d'application des fonctions du type hypergéométrique est la résolution de l'équation de Helmholtz par la méthode de séparation des variables dans différents systèmes de coordonnées curvilignes. Considérons, à titre d'exemple, la résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques paraboliques et en coordonnées du paraboloïde de révolution *). Les coordonnées cylindriques paraboliques ξ, η, ζ sont liées aux coordonnées cartésiennes par les formules

$$x=\xi\eta,\quad y=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\quad z=\zeta,$$

et les coordonnées du paraboloïde de révolution ξ, η, φ, par les formules

$$x=\xi\eta\cos\varphi,\quad y=\xi\eta\sin\varphi,\quad z=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2).$$

Dans le premier cas l'équation de Helmholtz $\Delta u+k^2u=0$ s'écrit

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+k^2u=0, \tag{4}$$

dans le deuxième cas,

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{(\xi\eta)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{5}$$

Cherchons la solution particulière de l'équation (4) par la méthode de séparation des variables, en posant

$$u=U(\xi)\,V(\eta)\,W(\zeta). \tag{6}$$

Portant (6) dans l'équation, on obtient

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}+\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}\right]=-\left[\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)}+k^2\right].$$

Le premier membre de cette égalité est indépendant de ζ et le second

*) Dans les manuels de mécanique quantique, les coordonnées du paraboloïde de révolution sont souvent appelées coordonnées paraboliques.

membre de ξ et de η. D'où

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left[\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}+\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}\right]=\lambda, \tag{7}$$

$$\frac{W''(\zeta)}{W(\zeta)}+k^2=-\lambda, \tag{8}$$

où λ est une constante.

Mettant l'équation (7) sous la forme

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}-\lambda\xi^2=-\left[\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}-\lambda\eta^2\right],$$

on obtient, par des considérations analogues,

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)}-\lambda\xi^2=\mu,$$

$$\frac{V''(\eta)}{V(\eta)}-\lambda\eta^2=-\mu,$$

où μ est une constante.

On arrive donc aux équations suivantes pour les fonctions $U(\xi)$, $V(\eta)$ et $W(\zeta)$:

$$U''-(\lambda\xi^2+\mu)\,U=0, \tag{9}$$

$$V''-(\lambda\eta^2-\mu)\,V=0, \tag{10}$$

$$W''+(k^2+\lambda)\,W=0. \tag{11}$$

La solution générale de l'équation de Helmholtz peut être obtenue par superposition des solutions particulières de la forme (6) correspondant aux diverses valeurs de λ et de μ.

De façon analogue, cherchant la solution de l'équation de Helmholtz en coordonnées du paraboloïde de révolution sous la forme

$$u=U(\xi)\,V(\eta)\,W(\varphi),$$

on obtient pour les fonctions $U(\xi)$, $V(\eta)$, $W(\varphi)$ les équations

$$U''+\frac{1}{\xi}U'+\left(k^2\xi^2-\frac{\lambda}{\xi^2}+\mu\right)U=0, \tag{12}$$

$$V''+\frac{1}{\eta}V+\left(k^2\eta^2-\frac{\lambda}{\eta^2}-\mu\right)V=0, \tag{13}$$

$$W''+\lambda W=0. \tag{14}$$

Les solutions des équations (11) et (14) s'expriment à l'aide des fonctions élémentaires. Les équations (10) et (13) se ramènent aux équations (9) et (12) par changement de μ en $-\mu$. Il ne nous reste donc qu'à rechercher les solutions des équations (9) et (12). L'équation (9) est une équation généralisée du type hypergéométrique (voir § 10, 2), telle que

$$\sigma(\xi)=1,\ \tilde{\tau}(\xi)=0,\ \tilde{\sigma}(\xi)=-\lambda\xi^2-\mu.$$

Réduisant l'équation (9) à une équation du type hypergéométrique, on peut poser

$$\pi_1(\xi)=\sqrt{\lambda}\,\xi,\quad \tau(\xi)=-2\sqrt{\lambda}\,\xi,\quad y=e^{1/2\sqrt{\lambda}\xi^2}U(\xi).$$

Pour la fonction $y(\xi)$, on a l'équation du type hypergéométrique

$$y''-2\sqrt{\lambda}\,\xi y'-(\mu+\sqrt{\lambda})\,y=0,$$

qu'on ramène par changement linéaire (voir § 10, 3) à l'équation pour la fonction d'Hermite.

Dans le cas de l'équation (12), il est naturel de commencer par faire le changement $\xi^2 = t$. Cela permet de réduire l'équation (12) à une équation généralisée du type hypergéométrique (voir § 10, 2) pour laquelle

$$\sigma(t)=t,\quad \tilde{\tau}(t)=1,\quad \tilde{\sigma}(t)=\frac{1}{4}(k^2t^2+\mu t-\lambda).$$

L'équation obtenue se ramène à l'équation pour une fonction hypergéométrique dégénérée par la méthode exposée au § 10.

3. **Intégrales définies contenant des fonctions du type hypergéométrique.** On rencontre dans les applications les intégrales définies contenant des fonctions du type hypergéométrique; on les calcule généralement soit à l'aide des représentations intégrales pour les fonctions du type hypergéométrique, soit à l'aide du développement de ces fonctions en séries. Nous allons nous borner à deux exemples.

1) L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)\,x^\rho\,dx$$

se calcule aisément au moyen du développement en série de la fonction de Bessel $J_\nu(bx)$. On a

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)\,x^\rho\,dx=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\left[\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k(bx/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\right]x^\rho\,dx=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k(b/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x^{\nu+\rho+2k}\,dx.$$

D'autre part,

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x^{\nu+\rho+2k}dx=\frac{1}{2a^{\nu+\rho+2k+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{\nu+\rho-1}{2}+k}\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}+k\right)}{2a^{\nu+\rho+2k+1}}.$$

D'où

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)\,x^\rho\,dx=\frac{1}{2a^{\rho+1}}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu+2k}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}+k\right)}{k!\,\Gamma(\nu+1+k)}.$$

Utilisant le développement (8) du § 28 pour la fonction hypergéométrique dégénérée et la relation fonctionnelle (13) du § 28, on arrive à exprimer l'intégrale en question à l'aide de la fonction hypergéométrique dégénérée:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} J_\nu(bx)\, x^\rho\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^\nu}{2a^{\rho+1}} F\left(\frac{\nu+\rho+1}{2},\ \nu+1,\ -\frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^\nu}{2a^{\rho+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}} F\left(\frac{\nu+1-\rho}{2},\ \nu+1,\ \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Remarquons que l'intégrale de Weber, que nous avons calculée au § 25, est un cas particulier de l'intégrale considérée pour $\rho = \nu + 1$, car dans ce cas on a

$$F\left(\frac{\nu+1-\rho}{2},\ \nu+1,\ \frac{b^2}{4a^2}\right) = F\left(0,\ \nu+1,\ \frac{b^2}{4a^2}\right) = 1.$$

2) Pour calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha, \gamma, kx)\, dx \qquad (\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re}k,\ \operatorname{Re}\nu > -1)$$

il est commode d'employer la représentation intégrale (3) du § 28, en supposant pour le moment que $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ et que $\lambda > k > 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha, \gamma, kx)\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt \int_0^\infty e^{-\lambda x + kxt} x^\nu\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{k}{\lambda}t\right)^{-\nu-1} dt.$$

La représentation intégrale (5) du § 27 donne

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\nu F(\alpha, \gamma, kx)\, dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\lambda^{\nu+1}} F\left(\alpha,\ \nu+1,\ \gamma,\ \frac{k}{\lambda}\right).$$

La formule obtenue peut être étendue à des valeurs quelconques de α, γ, λ et k par application du principe du prolongement analytique.

Formules fondamentales

Fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$

Equation différentielle:

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Solutions particulières:

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z), \quad y_2 = z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z).$$

Représentation intégrale:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}\,dt,$$

$$\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0.$$

Développement en série:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}, \quad |z|<1;$$

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\ldots(a+n-1).$$

Formule de dérivation :

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z).$$

Relations de récurrence. Dans le cas où les différences $\alpha_i - \alpha_k$, $\beta_i - \beta_k$, $\gamma_i - \gamma_k$ sont des entiers, n'importe quelles trois fonctions hypergéométriques $F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, z)$ et $F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, z)$ sont liées entre elles par des relations linéaires dont les coefficients sont des polynômes par rapport à la variable z (pour les méthodes de déduction des relations de récurrence, voir § 27, 2).

Relations fonctionnelles:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z);$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z);$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) +$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z);$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right) +$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{z}\right), \quad |\arg(-z)|<\pi.$$

Représentation asymptotique de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Elle découle de la dernière relation fonctionnelle et du développement en série de la fonction hypergéométrique de l'argument $1/z$.

Par combinaison des trois dernières relations fonctionnelles, on obtient plusieurs autres relations fonctionnelles. Les cas particuliers des relations fonctionnelles sont traités au § 27, 5.

Expression des diverses fonctions à l'aide de la fonction hypergéométrique:

$$F(\alpha, 0, \gamma, z) = 1;$$

$$F(\alpha, \beta, \beta, z) = (1-z)^{-\alpha};$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1, \beta+1, \frac{1+x}{2}\right);$$

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right) = (-1)^n F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+x}{2}\right):$$

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right);$$

$$E(z) = \int_0^{\pi/2} (1-z^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, z^2\right).$$

Fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha, \gamma, z)$ et $G(\alpha, \gamma, z)$

Equation différentielle:

$$zy'' + (\gamma - z)\,y' - \alpha y = 0.$$

Solutions particulières:

$$y_1 = F(\alpha, \gamma, z), \quad y_2 = G(\alpha, \gamma, z).$$

Représentations intégrales:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt}\,dt \quad (\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\alpha > 0);$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{z^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1} dt \quad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0);$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-zs} s^{\alpha-1}(1+s)^{\gamma-\alpha-1}\,ds \quad (\mathrm{Re}\,z > 0,\ \mathrm{Re}\,\alpha > 0).$$

Développement en série:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Formules de dérivation:

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \gamma+1, z);$$

$$\frac{d}{dz} G(\alpha, \gamma, z) = -\alpha G(\alpha+1, \gamma+1, z);$$

$$\frac{d}{dz}\,[z^\alpha G(\alpha, \gamma, z)] = -\frac{\gamma-\alpha-1}{z^2}\,[z^\alpha G(\alpha, \gamma-1, z)].$$

Relations de récurrence. Dans le cas où les différences $\alpha_l - \alpha_k$, $\gamma_l - \gamma_k$ sont des entiers, n'importe quelles trois fonctions hypergéométriques dégénérées $F(\alpha_1, \gamma_1, z)$, $F(\alpha_2, \gamma_2, z)$ et $F(\alpha_3, \gamma_3, z)$ sont liées entre elles par des relations linéaires dont les coefficients sont des polynômes en z. Il en est de même de la fonction $G(\alpha, \gamma, z)$ (pour la méthode de déduction des relations de récurrence, voir § 28, 3).

Relations fonctionnelles:

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma-\alpha, \gamma, -z);$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{1-\gamma} G(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z);$$

$$G(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z);$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} G(\alpha, \gamma, z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pm i\pi(\alpha-\gamma)} e^z G(\gamma-\alpha, \gamma, -z)$$

(le signe positif correspond à $\operatorname{Im} z > 0$).

Pour les cas particuliers des relations fonctionnelles, voir § 28, 5.

Représentations asymptotiques:

$$G(\alpha, \gamma, z) = z^{-\alpha}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right];$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$(|\arg z| \leqslant \pi, \ |\arg(-z)| \leqslant \pi).$$

Expression des diverses fonctions à l'aide de la fonction hypergéométrique dégénérée:

$$F(0, \gamma, z) = G(0, \gamma, z) = 1;$$

$$F(\alpha, \alpha, z) = e^z;$$

$$G(\alpha, \alpha+1, z) = z^{-\alpha};$$

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} F(-n, 1+\alpha, x);$$

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} F\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2z\right);$$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\pi}\,(2z)^\nu e^{-z} G\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2z\right).$$

Fonctions d'Hermite $H_\nu(z)$

Equation différentielle:

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0.$$

Solutions particulières:

$$y_1 = H_\nu(z), \quad y_2 = e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz).$$

Liaison avec les fonctions hypergéométriques dégénérées:

$$H_\nu(z) = 2^\nu G\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) \quad \left(|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\right);$$

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} z F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right).$$

Représentation intégrale:

$$H_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-t^2-2zt}\,t^{-\nu-1}\,dt.$$

Développement en série:

$$H_\nu(z)=\frac{1}{2\Gamma(-\nu)}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)\frac{z^n}{n!}$$

Formule de dérivation:

$$H'_\nu(z)=2\nu H_{\nu-1}(z).$$

Relation de récurrence:

$$H_\nu(z)-2zH_{\nu-1}(z)+2(\nu-1)H_{\nu-2}(z)=0.$$

Relations fonctionnelles:

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}e^{z^2}\left[e^{i\frac{\pi\nu}{2}}H_{-\nu-1}(iz)+e^{-i\frac{\pi\nu}{2}}H_{-\nu-1}(-iz)\right];$$

$$H_\nu(z)=e^{i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2+i\frac{\pi(\nu+1)}{2}}H_{-\nu-1}(-iz);$$

$$H_\nu(z)=e^{-i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2-i\frac{\pi(\nu+1)}{2}}H_{-\nu-1}(iz).$$

Représentations asymptotiques:

$$H_\nu(z)=(2z)^\nu\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]\left(|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}\right);$$

$$H_\nu(z)=(2z)^\nu\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2}(-2z)^{-\nu-1}\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\leqslant|\arg z|\leqslant\pi,\ |\arg(-z)|<\frac{\pi}{2}\right).$$

COMPLÉMENT

FORMULES DE QUADRATURE DU TYPE DE GAUSS

On entend par *formules de quadrature du type de Gauss* les formules de la forme

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \tag{1}$$

dans lesquelles les coefficients λ_j et les nœuds x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) sont choisis de sorte que la formule (1) soit exacte pour un polynôme quelconque de degré $2n - 1$.

Connaissant les moments de la fonction de poids

$$C_k = \int_a^b x^k \rho(x)\,dx,$$

on tire les valeurs de λ_j et de x_j du système d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^k = C_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Or, le plus souvent, l'établissement des formules de quadrature de la forme (1) s'effectue d'une autre façon. Il se trouve que les nœuds x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) sont les zéros d'un polynôme $p_n(x)$ orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle (a, b). Pour la démonstration, considérons la fonction

$$f(x) = x^k \widetilde{p}_n(x),$$

où

$$\widetilde{p}_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$$

est un certain polynôme de degré n dont les zéros sont les nœuds de la formule de quadrature. Pour $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, la fonction $f(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à $2n - 1$. Donc, si l'on porte la fonction $f(x)$ dans (1), l'intégrale doit être calculée exactement pour tout $k < n$. D'autre part, lorsque $k = 0, 1, \ldots, n - 1$,

on a

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx = \int_a^b x^k \widetilde{p}_n(x)\,\rho(x)dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^k (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\big|_{x=x_j} = 0.$$

Le polynôme $\widetilde{p}_n(x)$ est donc orthogonal à toute puissance inférieure à n et, par conséquent, il coïncide à un facteur constant près avec le polynôme $p_n(x)$ de degré n orthogonal par rapport au poids $\rho(x)$ sur l'intervalle (a, b). On en déduit que, pour déterminer les nœuds x_j de la formule de quadrature, il suffit de construire le polynôme $p_n(x)$ et de trouver ses zéros.

On trouve les coefficients λ_j au moyen de la formule de Darboux-Christoffel (6) du § 5 pour $y = x_j$, en remplaçant dans cette formule n par $n-1$. Comme $p_n(x_j) = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k(x)\,p_k(x_j)}{d_k^2} = \frac{1}{d_{n-1}^2}\,\frac{a_{n-1}}{a_n}\,\frac{p_n(x)\,p_{n-1}(x_j)}{x-x_j}. \tag{2}$$

Intégrant la relation (2) suivant x de a à b par rapport au poids $\rho(x)$, on obtient

$$1 = \frac{1}{d_{n-1}^2}\,\frac{a_{n-1}}{a_n}\,p_{n-1}(x_j)\int_a^b \frac{p_n(x)}{x-x_j}\,\rho(x)\,dx.$$

Puisque, conformément à (1),

$$\int_a^b \frac{p_n(x)}{x-x_j}\,\rho(x)\,dx = \lambda_j p_n'(x_j),$$

il vient

$$\lambda_j = \frac{1}{p_n'(x_j)}\int_a^b \frac{p_n(x)}{x-x_j}\,\rho(x)\,dx = \frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1}p_{n-1}(x_j)\,p_n'(x_j)} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k^2(x_j)}{d_k^2}}. \tag{3}$$

Les coefficients λ_j sont appelés quelquefois *nombres de Christoffel*. Comme il découle de (3), ils sont toujours positifs.

Remarquons que tous les raisonnements liés à la déduction des formules de quadrature du type de Gauss servant au calcul des intégrales restent vrais si l'on considère au lieu de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\rho(x)\,dx$ la somme $\sum_i f(x_i)\,\mu_i$ (voir § 17). Dans ce cas, la

recherche des nœuds de la formule de quadrature et des nombres de Christoffel se fait au moyen des polynômes orthogonaux correspondants d'une variable discrète. Bien souvent, cela permet de calculer des sommes des fonctions $f(x)$ difficiles à calculer en utilisant les sommes à termes beaucoup moins nombreux.

Considérons quelques exemples typiques d'emploi des formules de quadrature du type de Gauss.

E x e m p l e 1. Etant donné que de nombreuses fonctions spéciales peuvent être représentées sous la forme d'intégrales définies, l'application des formules de quadrature du type de Gauss au calcul de ces intégrales conduit à des formules d'interpolation fort commodes et suffisamment exactes pour les fonctions spéciales en question.

Parmi les fonctions cylindriques, ce sont les fonctions de Bessel $J_0(z)$ et $J_1(z)$ que l'on rencontre le plus fréquemment dans les applications. Dans bien des cas, il est commode d'employer pour ces fonctions des formules approchées de forme simple (c'est le cas notamment du calcul sur une machine électronique, lorsqu'on préfère utiliser les formules plutôt que les tableaux). Nous allons décrire la déduction de certaines formules d'interpolation pour les fonctions $J_0(z)$ et $J_1(z)$ découlant de la représentation intégrale de Poisson. On a

$$J_n(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^n\int_{-1}^{1}(1-s^2)^{n-1/2}\cos zs\,ds.$$

L'intégrale figurant dans le second membre se calcule pour $n=0$ d'après la formule de quadrature du type de Gauss:

$$\int_{-1}^{1}f(s)\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\approx\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(s_j).$$

Ici s_j sont les zéros des polynômes de Tchébychev de première espèce orthogonaux sur l'intervalle $(-1, 1)$ par rapport au poids $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$, et λ_j sont les nombres de Christoffel:

$$s_j=\cos\frac{2j-1}{2n}\pi,\quad \lambda_j=\frac{\pi}{n}.$$

Posant $f(s)=\cos zs$, on obtient la formule approchée suivante pour la fonction $J_0(z)$:

$$J_0(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\cos zs}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\approx\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(z\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right).$$

A l'aide de la relation $J_1(z) = -J_0'(z)$, on obtient aussi une formule approchée pour la fonction $J_1(z)$:

$$J_1(z) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \cos\frac{2j-1}{2n}\pi \sin\left(z\cos\frac{2j-1}{2n}\pi\right).$$

Lorsque n prend des valeurs paires, les nœuds s_j de la formule de quadrature sont disposés symétriquement par rapport au point $s = 0$. Donc, pour le cas où la fonction $f(s)$ est paire la formule de quadrature comprendra $n/2$ termes différents. Soit par exemple $n = 6$; on a alors

$$J_0(z) \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} \cos zx_j;$$

$$J_1(z) \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} x_j \sin zx_j.$$

Ici

$$x_j = \cos\frac{2j-1}{12}\pi = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = 0{,}965926, \\ \cos\frac{\pi}{4} = 0{,}707107, \\ \cos\frac{5}{12}\pi = 0{,}258819. \end{cases}$$

La précision du calcul à l'aide de ces formules peut être évaluée en regardant le tableau 4 où l'on compare les valeurs exactes des fonctions $J_0(z)$ et $J_1(z)$ et les valeurs calculées avec les formules approchées (désignées par $\tilde{J}_0(z)$ et $\tilde{J}_1(z)$).

Il est évident que les formules obtenues peuvent être utilisées aussi pour des z complexes, à condition que $|z|$ ne soit pas trop grand.

Tableau 4

z	$J_0(z)$	$\tilde{J}_0(z)$	$J_1(z)$	$\tilde{J}_1(z)$
0,4	0,9604	0,9604	0,1960	0,1960
1,2	0,6711	0,6711	0,4983	0,4983
2,0	0,2239	0,2239	0,5767	0,5767
2,8	—0,1850	—0,1850	0,4097	0,4097
3,6	—0,3918	—0,3918	0,09547	0,09548
4,4	—0,3423	—0,3423	—0,2028	—0,2027
5,2	—0,1103	—0,1105	—0,3432	—0,3427
6,0	0,1506	0,1496	—0,2767	—0,2748

Exemple 2. Considérons l'application des formules de quadrature du type de Gauss au calcul des sommes de la forme

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} f(k).$$

En utilisant les formules de quadrature du type de Gauss on remplace la somme S_N par une somme contenant moins de termes:

$$S_N \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

Dans ce cas, les nœuds x_j de la formule de quadrature seront les zéros d'un polynôme $p_n(x)$ jouissant des propriétés d'orthogonalité suivantes:

$$\sum_{k=0}^{N-1} p_n(k)\, p_m(k) = 0, \qquad m \neq n.$$

Les polynômes orthogonaux correspondants seront les polynômes de Tchébychev d'une variable discrète (voir § 17).

Nous donnons ci-dessous, à titre d'exemple, le tableau des résultats du calcul des sommes S_N pour $f(k) = \sqrt{l+k}$ (l est un entier) avec un nombre différent de points de quadrature n (tableau 5). De telles sommes se rencontrent dans les calculs de la mécanique quantique. Remarquons que pour $n = N$ la formule de quadrature fournit la valeur exacte de la somme initiale.

Tableau 5

$N-1$	10		1000	
n \ l	1	10	1	10
1	26,944	42,603	22 405	22 606
3	25,808	42,360	21 207	21 453
5	25,786	42,360	21 148	21 405
N	25,785	42,360	21 129	21 395

Exemple 3. Pour déterminer les coefficients d'absorption de lumière dans les lignes du spectre, on a besoin de calculer les intégrales de la forme *)

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{-s^2}}{(x-s)^2 + y^2}\, ds \quad (y > 0). \tag{4}$$

*) Voir I. Sobelman, Introduction à la théorie des spectres atomiques, Fizmatghiz, 1963, § 35, 3.

Grâce au facteur e^{-s^2}, le domaine des valeurs de s essentiel pour l'intégration se détermine approximativement pour $|s| < 1$. Dans ce domaine, pour un x donné, la fonction $\frac{1}{(x-s)^2+y^2}$ sera une fonction suffisamment régulière de la variable s si la valeur de y est relativement élevée. Ainsi, pour $y > 1$, on peut employer lors du calcul de la fonction $K(x, y)$ des formules de quadrature du type de Gauss basées sur l'utilisation des polynômes d'Hermite:

$$K(x, y) \approx K_1(x, y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{y}{(x-s_j)^2+y^2}. \qquad (5)$$

Cependant, quand les valeurs de y sont petites, la fonction $\frac{1}{(x-s)^2+y^2}$ admettra un maximum aigu pour $x = s$ et la formule de quadrature (5) fournira de mauvais résultats lorsque n est petit. Pour y remédier, on peut mettre préalablement l'expression de $K(x, y)$ sous une forme plus commode pour l'application des formules de quadrature du type de Gauss. On a

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2}}{(x-s)-iy} ds.$$

Passons, à l'aide du théorème de Cauchy, de l'intégration le long de l'axe réel à l'intégration le long d'une droite parallèle à celui-ci et posons $s = ai + t$, $a > 0 \ (-\infty < t < \infty)$; l'expression de $K(x, y)$ devient

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(ai+t)^2}}{(x-t)-i(a+y)} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}[(a+y)\cos 2at-(x-t)\sin 2at]}{(x-t)^2+(a+y)^2} dt. \qquad (6)$$

Grâce à la transformation effectuée, on voit sous le signe d'intégration, au lieu de la fonction à maximum aigu $\frac{1}{(x-s)^2+y^2}$, une fonction plus régulière $\frac{1}{(x-t)^2+(a+y)^2}$ qui se prête à une approximation suffisamment précise dans le domaine essentiel pour l'intégration par un polynôme d'un degré relativement petit. Il est vrai qu'on voit apparaître alors dans l'expression sous le signe d'intégration un facteur oscillant supplémentaire. Si l'on choisit $a \approx 1$, la fonction $[(a+y)\cos 2at-(x-t)\sin 2at]$ sera suffisamment régulière elle aussi dans le domaine essentiel pour l'intégration. Appliquons maintenant à l'intégrale (6) une formule de quadrature du

type de Gauss utilisant les polynômes d'Hermite:

$$K(x, y) \approx K_2(x, y) = \frac{e^{a^2}}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{(a+y)\cos 2as_j - (x-s_j)\sin 2as_j}{(x-s_j)^2+(a+y)^2}. \quad (7)$$

L'analyse faite ci-dessus montre que la formule de quadrature du type de Gauss appliquée à l'intégrale (6) donne de bons résultats pour toute valeur de x et y, même si les points de quadrature sont peu nombreux, à condition de choisir $a \approx 1$. Nous donnons, à titre d'illustration, un tableau des résultats de calcul des intégrales (4) et (6) par les formules (5) et (7) pour un nombre différent de points de quadrature avec $a = 1$ et pour des valeurs diverses de x et y (tableau 6).

Tableau 6

n	$x = 0,\ y = 0{,}01$		$x = 1,\ y = 0{,}01$	
	$K(x, y) = 0{,}989$		$K(x, y) = 0{,}369$	
	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$
3	37,6	1,013	0,0225	0,387
5	30,1	0,991	0,693	0,370
7	25,8	0,9895	0,0434	0,369
n	$x = 0,\ y = 1$		$x = 1,\ y = 1$	
	$K(x, y) = 0{,}428$		$K(x, y) = 0{,}305$	
	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$	$K_1(x, y)$	$K_2(x, y)$
3	0,451	0,441	0,293	0,317
5	0,434	0,428	0,305	0,305
7	0,430	0,428	0,306	0,305

Pour terminer, nous donnons dans les tableaux 7 à 9 les valeurs des nombres de Christoffel λ_j et des nœuds x_j pour le calcul des différentes intégrales à l'aide des formules de quadrature du type de Gauss *). Ces formules utilisent comme nœuds x_j les zéros des polynômes de Legendre, de Laguerre et d'Hermite. Pour les polynômes de Legendre et d'Hermite, le tableau ne contient que des valeurs non négatives de x_j. Notons qu'il existe alors pour chaque valeur positive de x_j une valeur négative $-x_j$, le poids λ_j restant le même.

---

*) Pour les nombres $\lambda_j \ll 1$, on emploie une notation abrégée: par exemple, 0,(4)233699 = 0,0000233699.

Tableau 7

n	x_j	λ_j
2	0,5773502692	1
3	0 0,7745966692	0,8888888888 0,5555555555
4	0,3399810436 0,8611363116	0,6521451549 0,3478548451
5	0 0,5384693101 0,9061798459	0,5688888888 0,4786286705 0,2362688506
6	0,2386191861 0,6612093865 0,9324695142	0,4679139346 0,3607615731 0,1713244924
7	0 0,4058451514 0,7415311856 0,9491079123	0,4179591837 0,3818300505 0,2797053915 0,1294849662
8	0,1834346422 0,5255324099 0,7966664774 0,9602898565	0,3626837834 0,3137066459 0,222381035 0,1012285363
9	0 0,3242534234 0,6133714327 0,8360311073 0,9681602395	0,3302393550 0,3123470770 0,2606106964 0,1806481607 0,08127438836
10	0,1488743390 0,4333953941 0,6794095683 0,8650633667 0,9739065285	0,2955242247 0,2692667193 0,2190863625 0,1494513491 0,06667134430

Tableau 8

n	x_j	λ_j
1	1	1
2	0,5857864376 3,4142135624	0,8535533906 0,1464466094
3	0,4157745567 2,2942803603 6,2899450829	0,7110930099 0,2785177336 0,0103892565
4	0,3225476896 1,7457611011 4,5366202969 9,3950709123	0,6031541043 0,3574186924 0,03888790851 0,(3)5392947056
5	0,2635603197 1,4134030591 3,5964257710 7,0858100059 12,6408008443	0,5217556106 0,3986668111 0,07594244968 0,(2)3611758679 0,(4)2336997239
6	0,2228466042 1,1889321017 2,9927363261 5,7751435691 9,8374674184 15,9828739806	0,4589646740 0,4170008308 0,1133733821 0,01039919745 0,(3)2610172028 0,(6)8985479064
7	0,1930436766 1,0266648953 2,5678767450 4,90003530845 8,1821534446 12,7341802918 19,3957278623	0,4093189517 0,4218312779 0,1471263487 0,02063351447 0,(2)1074010143 0,(4)1586546435 0,(7)3170315479

Tableau 8 (suite)

n	x_j	λ_j
8	0,1702796323	0,3691885893
	0,9037017768	0,4187867808
	2,2510866299	0,1757949866
	4,2667001703	0,03334349226
	7,0459054024	0,(2)2794536235
	10,7585160102	0,(4)9076508773
	15,7406786413	0,(6)8485746716
	22,8631317369	0,(8)1048001175
9	0,1523222277	0,3361264218
	0,8072200227	0,4112139804
	2,0051351556	0,1992875254
	3,7834739733	0,04746056277
	6,2049567778	0,(2)5599626611
	9,3729852517	0,(3)3052497671
	13,4662369110	0,(5)6592123026
	18,8335977889	0,(7)4110769330
	26,3740718909	0,(10)3290874030
10	0,1377934705	0,3084411158
	0,7294545495	0,4011199292
	1,8083429017	0,2180682876
	3,4014336979	0,06208745610
	5,5524961400	0,(2)9501516975
	8,3301527468	0,(3)7530083886
	11,8437858379	0,(4)2825923350
	16,2792578314	0,(6)4249313985
	21,9965858120	0,(8)1839564824
	29,9206970122	0,(12)9911827220

Tableau 9

n	x_j	λ_j
1	0	1,772453851
2	0,7071067812	8,8862269255
3	0	1,181635901
	1,2247448714	0,2954089752
4	0,5246476233	0,8049140900
	1,6506801239	0,08131283545
5	0	0,9453087205
	0,9585724646	0,3936193232
	2,0201828705	0,01995324206
6	0,4360774119	0,7246295952
	1,3358490740	0,1570673203
	2,3506049737	0,(2)4530009906
7	0	0,8102646176
	0,8162878829	0,4256072526
	1,6735516288	0,05451558282
	2,6519613568	0,(3)9717812451
8	0,3811869902	0,6611470126
	1,1571937124	0,2078023258
	1,9816567567	0,01707798301
	2,9306374203	0,(3)1996040722
9	0	0,7202352156
	0,7235510188	0,4326515590
	1,4685532892	0,08847452739
	2,2665805845	0,(2)4943624276
	3,1909932018	0,(4)3960697726
10	0,3429013272	0,6108626337
	1,0366108298	0,2401386111
	1,7566836493	0,03387439446
	2,5327316742	0,(2)1343645747
	3,4361591188	0,(5)7640432855

Les formules de quadrature sont de la forme

1) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

(x_j sont les zéros des polynômes de Legendre $P_n(x)$, voir tableau 7);

2) $$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

(x_j sont les zéros des polynômes de Laguerre $L_n^0(x)$, voir tableau 8);

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$$

(x_j sont les zéros des polynômes d'Hermite $H_n(x)$, voir tableau 9).

BIBLIOGRAPHIE

1. H. BATEMAN, A. ERDÉLYI. Higher transcendental functions. New York, McGraw-Hill, 1955.
2. G. N. WATSON. A treatise of the theory of Bessel functions, Cambridge Univ. press, Cambridge, 1944.
3. Н. Я. ВИЛЕНКИН. Специальные функции и теория представлений групп (N. Vilenkine. Fonctions spéciales et théorie des représentations des groupes), «Наука», 1965.
4. И. М. ГЕЛЬФАНД, Р. А. МИНЛОС, З. Я. ШАПИРО. Представления группы вращений и группы Лоренца (I. Guelfand, R. Minlos, Z. Chapiro. Représentations du groupe de rotations et du groupe de Lorentz), Физматгиз, 1958.
5. E. W. HOBSON. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge Univ. press, Cambridge, 1931.
6. M. LAVRENTIEV, B. CHABAT. Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Editions Mir, Moscou, 1972.
7. L. LANDAU, E. LIFCHITZ. Mécanique quantique (Théorie non relativiste), v. III. Editions Mir, Moscou, 1974.
8. Н. Н. ЛЕБЕДЕВ. Специальные функции и их приложения (N. Lébédev. Fonctions spéciales et leurs applications), Физматгиз, 1963.
9. А. Г. СВЕШНИКОВ, А. Н. ТИХОНОВ. Теория функций комплексной переменной (A. Svechnikov, A. Tikhonov. Théorie des fonctions d'une variable complexe), «Наука», 1973.
10. G. SZEGÖ. Orthogonal polynomials. New York, 1959.
11. А. Н. ТИХОНОВ, А. А. САМАРСКИЙ. Уравнения математической физики (A. Tikhonov, A. Samarski. Equations de la physique mathématique), «Наука», 1973.
12. E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON. A course of modern analysis. Cambridge Univ. press, Cambridge, 1952.
13. L. SCHIFF. Quantum mechanics. New York, McGraw-Hill, 1955.
14. E. P. WIGNER. The application of group theory to the special functions of mathematical physics. Princeton lectures, part I, II, Spring, 1955.

INDEX DES NOTATIONS PRINCIPALES

INDEX DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.
Notre adresse:
2, Pervi Rijski péréoulok, Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

